**MTE-09**

# सत्रीय कार्य पुस्तिका

# वास्तविक विश्लेषण

(01 जनवरी, 2026 से 31 दिसंबर, 2026 तक वैध)


विज्ञान विद्यापीठ
इन्दिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय
मैदान गढ़ी, नई दिल्ली – 110 068

(2026)

प्रिय विद्यार्थी,

हम उम्मीद करते हैं कि स्नातक उपाधि कार्यक्रम में अपनाई गयी मूल्यांकन पद्धति से आप भली-भांति परिचित हैं। आपके नामांकन के बाद हमने आपको ऐच्छिक पाठ्यक्रम की एक कार्यक्रम दर्शिका भेजी थी। उसमें सत्रीय कार्य से संबंधित जो भाग है, उसे कृपया दुबारा पढ़ लें। जैसा कि आप जानते हैं निरन्तर मूल्यांकन के लिए 30% अंक निर्धारित किए गए हैं। इसके लिए आपको एक **सत्रीय कार्य** करना होगा। यह सत्रीय कार्य इस पुस्तिका में शामिल है।

**सत्रीय कार्य से संबंधित निर्देश**

इससे पहले कि आप किसी प्रश्न का उत्तर लिखें, निम्नलिखित निर्देशों को ध्यान से पढ़ें।

1) अपनी उत्तर पुस्तिका के पहले पृष्ठ पर सबसे ऊपर निम्नलिखित प्रारूप के आधार पर विवरण लिखें।

---

नामांकन संख्या : ................................

नाम : ................................

पता : ................................

................................

................................

पाठ्यक्रम संख्या : ...................................

पाठ्यक्रम शीर्षक : ..................................

सत्रीय कार्य संख्या : ...................................

अध्ययन केंद्र : ...................................                दिनांक :
..............................

---

**कार्य के सही और शीघ्र मूल्यांकन के लिए दिये गए प्रारूप का सही अनुसरण करें।**

2) अपना उत्तर लिखने के लिए फुलस्कैप काग़ज़ का इस्तेमाल करें, जो बहुत पतला न हो।

3) प्रत्येक कागज़ पर बायें, ऊपर और नीचे 4 से.मी. जगह छोड़ें।

4) आपके उत्तर स्पष्ट होने चाहिए।

5) प्रश्नों के हल लिखते समय, स्पष्ट संकेतों द्वारा बताएं कि किस प्रश्न का कौन सा भाग हल किया जा रहा है।

6) यह सत्रीय कार्य 31 दिसम्बर, 2026 तक वैध है। यदि आप इस सत्रीय कार्य में फ़ेल हो जाते हैं या इसे 31 दिसम्बर, 2026 तक जमा करने में असफ़ल रहते हैं, तो आप जनवरी, 2027 सत्र का सत्रीय कार्य प्राप्त करें और उसे उस सत्रीय कार्य में दिए गए आदेशों के अनुसार जमा करें।

7) परीक्षा फ़ार्म भरने से पहले सत्रीय कार्य करना ज़रूरी है।

अपनी उत्तर पुस्तिका की एक प्रति अपने पास अवश्य रखें।

**शुभकामनाओं के साथ।**

# स्त्रीय कार्य

**पाठ्यक्रम कोड: एम.टी.ई.-09**
**सत्रीय कार्य कोड : एम.टी.ई -09/टी एम ए/2026**
**अधिकतम अंक: 100**

1. बताइए निम्नलिखित कथन सत्य हैं अथवा असत्य? अपने उत्तरों के कारण बताइए। (10)

   क) अंतराल $]0,1]$ का पूरक एक विवृत समुच्चय है।

   ख) प्रत्येक परिबद्ध अनुक्रम अभिसारी होता है।

   ग) $f(x)=\dfrac{4x+3}{x^2+1}$ द्वारा परिभाषित फलन $f:[-2,2]\to \mathbf{R}$ एकसमानतः संतत है।

   घ) यदि किसी फलन का प्रथम अवकलज एक बिंदु पर लुप्त हो जाता है, तब इसका उस बिंदु पर चरम मान होता है।

   ड.) $f(x)=x+[x]$ द्वारा परिभाषित फलन $f:[0,2]\to \mathbf{R}$ समाकलनीय नहीं है।

2. क) फलन $f$ के असांतत्य बिंदु और प्रत्येक असांतत्य का प्रकार भी ज्ञात कीजिए :

$$f(x)=\begin{cases} -x^2, & \text{when } x\le 0 \\ 4-5x, & \text{when } 0<x\le 1 \\ 3x-4x^2, & \text{when } 1<x\le 2 \\ -12x+2x, & \text{when } x>2 \end{cases}$$

   यह भी जाँच कीजिए कि फलन $f$ बिंदु $x=1$ पर अवकलनीय है या नहीं। (5)

   ख) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x^2}{x^2\sin x^2}$ ज्ञात कीजिए। (3)

   ग) जाँच कीजिए कि अंतराल $]5,9]$ और $[6,12[$ तुल्य हैं या नहीं। (2)

3. क) सिद्ध कीजिए कि एक निरंतर ह्रासमान फलन हमेशा एकक होता है। (3)

   ख) असमिका $4\le 2x+3\le 6$ को मापांक रूप में लिखिए। (2)

   ग) निम्नलिखित समुच्चयों के लिए बुलजानो–वायस्ट्रॉस प्रमेय को सत्यापित कीजिए :

   i) ऋणेतर पूर्णांक समुच्चय

   ii) अंतराल $[-1,\infty]$ (3)

   घ) जाँच कीजिए कि सीमा $\lim\limits_{x\to 0}(x\operatorname{cosec} x)^x$ का अस्तित्व है या नहीं। (2)

4. क) निम्नलिखित श्रेणी के अभिसरण की जाँच कीजिए। (6)

   (i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\,x^{n-1}, x>0.$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\sqrt{n^4+9}-\sqrt{n^4-9}\right]$

ख) दिखाइए कि $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{5}{7n+2}$ सप्रतिबंधत अभिसारी है। (4)

5. क) $f(x)=3-5x^3+5x^4-x^5$ द्वारा परिभाषित फलन $f$ के स्थानिक न्यूनतम और स्थानिक अधिकतम मान ज्ञात कीजिए। (5)

ख) दिखाइए कि $\mathbf{R_n}(x)$, जो $e^{4s}$, का मैक्लारिन श्रेणी प्रसार का लंग्राज रूप अवशेष है शून्य की ओर प्रवृत्र करता है जबकि $n\to\infty$. होता है। इस तरह $e^{4s}$ का मैक्लोरिन का अनंत प्रसार ज्ञात कीजिए। (5)

6. क) यदि विभाजन $P_2$ विभाजन $P_1$ का $[a,b]$, में एक अधिशोधन है, तो $L(P_1,f)\le L(P_2,f)$ और $U(P_2,f)\le U(P_1,f)$. होगा। इस परिणाम की अंतराल $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ पर परिभाषित फलन $f(x)=2\cos x$ और विभाजन $P_1=\left\{0,\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right\}$ और $P_2=\left\{0,\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right\}$ के लिए जाँच कीजिए।(6)

ख) $\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{2n}\frac{n^2}{(2n+r)^3}$.का मूल्यांकन कीजिए। (4)

7. क) गणितीय आगमन सिद्धांत लागू करके दर्शाइए कि

$$\frac{\cos\alpha-\cos\beta}{\sin\alpha-\sin\beta}=\tan\theta, 0<\alpha<\theta<\beta<\frac{\pi}{2} \qquad (5)$$

ख) यदि $\lim_{x\to 0}\frac{a\tan x+bx}{x^3}$ का मान परिमित है तो a और b का मान ज्ञात कीजिए। (3)

ग) दिखाइए कि $5+\sqrt{2}$ एक बीजीय संख्या है। (2)

8. क) गणितीय आगमन सिद्धांत लागू करके दर्शाइए कि

$$1^2+3^2+5x+...+(2n-1)^2=\frac{1}{3}n(4n^2-1)\ \forall\, n\in\mathbf{N}. \qquad (4)$$

ख) दिखाइए कि समीकरण $x^3+x^2-2x-2=0$ का $x=-1$ के अलावा वास्तविक मूल होता है। (4)

ग) जाँच कीजिए कि पूर्णांकों का समुच्चय गणनीय है या नहीं। (2)

9. क) वायर्स्ट्रस M-परीक्षण का प्रयोग करके दिखाइए कि निम्नलिखित श्रेणी एक समान अभिसारी है।

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^3\, x^n, x\in\left[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right]. \qquad (5)$$

ख) समाकलन गणित की मूलभूत प्रमेय का प्रयोग करके समाकलन $\int_0^1\left(2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}\right)dx$ का मूल्यांकन कीजिए। (5)

10. क) समाकलों के लिए बोनट माध्य मान को लागू करके दिखाइए कि $\left|\int_7^{10} \frac{\sin x}{x} dx\right| \le \frac{2}{7}$. (3)

ख) प्रतिलोम फलन प्रमेय लागू करके दिखाइए कि $f(x) = 2x + 7$ द्वारा परिभाषित फलन $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ का प्रतिलोम होता है, जो संतत होता है। इसका प्रतिलोम फलन भी ज्ञात कीजिए। (3)

ग) अंतराल $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ में फलनों $f(x) = x$ और $g(x) = \cos x$ के लिए द्वितीय माध्य मान प्रमेय का जाँच कीजिए। (4)