MTE-02

सत्रीय कार्य पुस्तिका

स्नातक उपाधि कार्यक्रम

(बी.एससी./बी.ए./बी.कॉम.)

रैखिक बीजगणित

1 जनवरी, 2026 से 31 दिसंबर, 2026 तक वैध

विज्ञान विद्यापीठ
इन्दिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय
मैदान गढ़ी, नई दिल्ली-110 068

(2026)

प्रिय विद्यार्थी,

हम उम्मीद करते हैं कि स्नातक उपाधि कार्यक्रम में अपनायी गयी मूल्यांकन पद्धति से आप भली–भांति परिचित हैं। आपके नामांकन के बाद हमने आपको ऐच्छिक पाठ्यक्रम की एक कार्यक्रम दर्शिका भेजी थी। उसमें सत्रीय कार्य से संबंधित जो भाग हैं उसे कृपया दुबारा पढ़ लें। जैसा कि आप जानते हैं निरन्तर मूल्यांकन के लिए 30% अंक निर्धारित किये गये हैं। इसके लिए आपको **एक सत्रीय कार्य** करना होगा। यह सत्रीय कार्य इस पुस्तिका में शामिल है।

सत्रीय कार्य से संबंधित निर्देश

इससे पहले कि आप किसी प्रश्न का उत्तर लिखें, निम्नलिखित निर्देशों को ध्यान से पढ़ें।

1) अपनी उत्तर पुस्तिका के पहले पृष्ठ पर सबसे ऊपर निम्नलिखित प्रारूप के आधार पर विवरण लिखें।

नामांकन संख्या : …………………………..

नाम : …………………………..

पता : …………………………..

…………………………..

…………………………..

पाठ्यक्रम संख्या : ………………………………..

पाठ्यक्रम शीर्षक : ……………………………….

सत्रीय कार्य संख्या : ……………………………….

अध्ययन केंद्र : ……………………………….

दिनांक : …………………………

कार्य के सही और शीघ्र मूल्यांकन के लिए दिये गये प्रारूप का सही अनुसरण करें।

2) अपना उत्तर लिखने के लिए फुलस्कैप काग़ज़ का इस्तेमाल करें, जो ज़्यादा पतला न हो।

3) प्रत्येक काग़ज़ पर बॉयें, ऊपर और नीचे 4 से.मी. की जगह छोड़ें।

4) आपके उत्तर स्पष्ट होने चाहिए।

5) प्रश्नों के हल लिखते समय, स्पष्ट संकेतों द्वारा बताएं कि किस प्रश्न का कौनसा भाग हल किया जा रहा है।

6) यह सत्रीय कार्य **दिसम्बर, 2026** तक वैध हैं। यदि आप इस सत्रीय कार्य में फेल हो जाते हैं या इसे **दिसम्बर, 2026** तक जमा करने में असफल रहते हैं तो आप **2027** सत्र का सत्रीय कार्य प्राप्त करें और उसे उस सत्रीय कार्य में दिए गए आदेशों के अनुसार जमा करें।

7) **परीक्षा फार्म भरने से पहले सत्रीय कार्य करना अनिवार्य है।**

8) **अपनी उत्तर पुस्तिका की एक प्रति अपने पास अवश्य रखें।**

शुभकामनाओं के साथ।

सत्रीय कार्य

पाठ्यक्रम कोड : MTE-02
सत्रीय कार्य कोड : MTE-02/TMA/2026
अधिकतम अंक : 100

1. निम्नलिखित में से कौन से कथन सत्य हैं और कौन से असत्य हैं? लघु उप्पत्ति या प्रति उदाहरण के साथ अपनी उत्तर की पुष्टि कीजिए।

   i) $f(x) = \cos x$ द्वारा परिभाषित फलन $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $1-1$ है।

   ii) $x * y = \log(xy)$ द्वारा परिभाषित संक्रिया S पर द्वि-आघारी संक्रिया है जहाँ S समुच्चय $\{x \in \mathbf{R} \mid x > 0\}$ है।

   iii) समुच्चय $\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbf{R}, x_1 = 2x_2 + 3\}$ $\mathbf{R}^n$ की उपसमष्टि है।

   iv) जाति 6 का कोई 7×5 आव्यूह नहीं होता।

   v) यदि V और V' सदिश समष्टियाँ हैं और $T : V \to V'$ रैखिक रूपातंरण है, तब जब भी $u_1, u_2, \ldots, u_k$ रैखिकतः स्वतंत्र होते हैं, तब $Tu_1, Tu_2, \ldots, Tu_k$ भी रैखिकतः स्वतंत्र होते हैं।

   vi) यदि V एक सदिश समष्टि है और $T : V \to V \det(T) = 0$ वाला रैखिक सँकारक है, तब T विकर्णनीय नहीं होता।

   vii) एक 3×3 आव्यूह के अल्पिष्ठ बहुपद की कोटि अधिकतम 2 है।

   viii) कोई भी 2×2 आव्यूह A के लिए $Adj(A^t) = (Adj(A))^t$.

   ix) केवल शून्य आव्यूह ऐसा आव्यूह है जो सममित और विषम सममित दोनों होता है।

   x) कोई भी ऐसा निर्देशांक रूपांतरण नहीं है जो द्विघाती समघात $x^2 + y^2 + z^2$ को द्विघाती समघात $xz + yz$ में रूपांतरित करता है। (20)

2. क) $f(x) = \dfrac{2x+1}{x+1}$ द्वारा परिभाषित फलन $f : \mathbf{R} \setminus \{-1\} \to \mathbf{R}$ लीजिएः

   i) जाँच कीजिए कि $f(x)$ सुपरिभाषित और $1-1$ है। (3)

   ii) जाँच कीजिए कि किसी $x \in \mathbf{R}$ के लिए $f(x) \neq 2$ है। (2)

   iii) जाँच कीजिए कि $g(x) = \dfrac{x-1}{2-x}$ द्वारा दिया गया $g : \mathbf{R} \setminus \{2\} \to \mathbf{R}$ सुपरिभाषित और $1-1$ है। इसके आगे जाँच कीजिए कि किसी $x \in \mathbf{R}$ के लिए $g(x) \neq -1$ है। (4)

   iv) जाँच कीजिए कि $x \in \mathbf{R} \setminus \{2\}$ के लिए $(fog)\,(x) = x$ और $x \in \mathbf{R} \setminus \{-1\}$ के लिए $(gof)\,(x) = x$. (4)

   ख) मूल बिन्दु से समतल $\boldsymbol{r}.(6\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} + 2\sqrt{3}\boldsymbol{k}) + 2 = 0$ के लंब की दिक्कोज्याएं ज्ञात कीजिए। (2)

3. मान लीजिए V ऐसे सभी फलनो का समुच्चय है जो $\mathbf{R}$ में दो बार अवकलनीय हैं और $S = \{\cos x, \sin x, x\cos x, x\sin x\}$.

   क) जाँच कीजिए कि S, $\mathbf{R}$ पर रैखिकतः स्वतंत्र समुच्चय है। (**संकेतः** समीकरण $a_0 \cos x + a_1 \sin x + a_2 x \cos x + a_3 x \sin x$ लीजिए।

$x = 0, \pi, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}$, इत्यादि रखिए और a_i के हल कीजिए) (5)

ख) मान लीजिए $W = [S]$ और मान लीजिए $T : V \to V, Tf(x) = \frac{d^2}{dx^2}(f(x)) + 2\frac{d}{dx}(f(x))$ द्वारा परिभाषित फलन है। जाँच कीजिए कि T, V पर रैखिक रूपांतरण है। (3)

ग) जाँच कीजिए कि $T(W) \subset W$. (7)

घ) आधार S के सापेक्ष W पर T का आव्यूह लिखिए। (2)

ड़) क्या रैखिक संकारक T का आव्यूह व्युत्क्रमणीय है। अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। (3)

4. क) दिखाइए कि यदि A वास्तविक प्रविष्टियों वाला $n \times n$ आव्यूह है तब एक ऐसा $n \times n$ सममित आव्यूह S और $n \times n$ विषम सममित आव्यूह S' हैं जिसके लिए $A = S + S'$. (3)

ख) संगत आव्यूह को पंक्ति समानीत सोपानक रूप तक समानीत करके निम्नलिखित समीकरण निकायों के हल ज्ञात कीजिए:

$$2a + 3b + 4c + d = 8$$
$$a + 2b + 2c + 2d = 3$$
$$a - b + c + 3d = 3$$
(5)

5. क) निम्नलिखित आव्यूहों के लिए, जाँच कीजिए कि ऐसे व्युत्क्रमणीय आव्यूह P का अस्तित्व होता है जिसके लिए $P^{-1}AP$ विकर्ण है। जब ऐसे P का अस्तित्व होता है तब P ज्ञात कीजिए।

i) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 6 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ ii) $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ (11)

ख) कैली–हैमिल्टन प्रमेय द्वारा भाग क) में आव्यूह B का व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए। (3)

ग) किन्ही दो आव्यूहों A और B के $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ तथ्य का प्रयोग करके निम्नलिखित समिका सिद्ध कीजिए।

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$$
(3)

6. क) ऐसे $a, b \in \mathbf{C}$ के मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए आव्यूह

$$\begin{bmatrix} 1 & i & 1+i \\ a & 0 & b \\ 1-i & 2+i & 1 \end{bmatrix}$$

हर्मिटी है। (2)

ख) क्या ऐसे $a \in \mathbf{C}$ के मान होते हैं जिसके लिए आव्यूह

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & a \end{bmatrix}$$

ऐकिक है? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। (3)

ग) मान लिजिए (x_1, x_2, x_3) और (y_1, y_2, y_3) आधारों $B_1 = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}, B_2 = \{(1, 0, 0), (0, 1, 2), (0, 2, 1)\}$ के सापेक्ष निर्देशांको को निरूपित करते है। यदि $Q(X) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + x_2^2 + x_3^2$, तब (y_1, y_2, y_3) के पदों में Q का निरूपण ज्ञात कीजिए। (3)

7. क) सदिशों

$$\{(1, i, 0, 1), (1, 0, i, 0), (-1, 0, 1, -1)\}$$

द्वारा जनित $\mathbf{C}^4$ की उपसमष्टि के लिए प्रसामान्य लांबिक आधार ज्ञात करने के लिए ग्राम–श्मिट लांबिकीकरण प्रक्रम लागू कीजिए। (6)

ख) द्विधाती समघात $x^2 - 2y^2 + 2^2 + 2xy + 6yz$ का लांबिक विहित समानयन और इसके मुख्य अक्ष ज्ञात कीजिए। द्विधाती समघात की जाति और चिन्ह भी ज्ञात कीजिए। (6)