MTE-08

सत्रीय कार्य पुस्तिका

अवकल समीकरण

(01 जनवरी, 2024 से 31 दिसंबर, 2024 तक वैध)

विज्ञान विद्यापीठ
इन्दिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय
मैदान गढ़ी, नई दिल्ली – 110 068

(2026)

प्रिय विद्यार्थी,

मूल्यांकन के लिए 30% अंक निर्धारित किए गए हैं। इसके लिए आपको एक **सत्रीय कार्य** करना होगा। यह सत्रीय कार्य इस पुस्तिका में शामिल है।

सत्रीय कार्य से संबंधित निर्देश

इससे पहले कि आप किसी प्रश्न का उत्तर लिखें, निम्नलिखित निर्देशों को ध्यान से पढ़ें।

1) अपनी उत्तर पुस्तिका के पहले पृष्ठ पर सबसे ऊपर निम्नलिखित प्रारूप के आधार पर विवरण लिखें।

नामांकन संख्या : ....

नाम : ....

पता : ....

....

....

पाठ्यक्रम संख्या : ....

पाठ्यक्रम शीर्षक : ....

सत्रीय कार्य संख्या : ....

अध्ययन केंद्र : ....　　दिनांक : ....

कार्य के सही और शीघ्र मूल्यांकन के लिए दिये गए प्रारूप का सही अनुसरण करें।

2) अपना उत्तर लिखने के लिए फुलस्कैप काग़ज़ का इस्तेमाल करें, जो बहुत पतला न हो।

3) प्रत्येक कागज़ पर बायें, ऊपर और नीचे 4 से.मी. जगह छोड़ें।

4) आपके उत्तर स्पष्ट होने चाहिए।

5) प्रश्नों के हल लिखते समय, स्पष्ट संकेतों द्वारा बताएं कि किस प्रश्न का कौन सा भाग हल किया जा रहा है।

6) यह सत्रीय कार्य 31 दिसम्बर, 2026 तक वैध है। यदि आप इस सत्रीय कार्य में फ़ेल हो जाते हैं या इसे 31 दिसम्बर, 2026 तक जमा करने में असफ़ल रहते हैं, तो आप जनवरी, 2027 सत्र का सत्रीय कार्य प्राप्त करें और उसे उस सत्रीय कार्य में दिए गए आदेशों के अनुसार जमा करें।

7) परीक्षा फ़ार्म भरने से पहले सत्रीय कार्य करना ज़रूरी है।

अपनी उत्तर पुस्तिका की एक प्रति अपने पास अवश्य रखें।

शुभकामनाओं के साथ।

सत्रीय कार्य

पाठ्यक्रम कोड: MTE-08
सत्रीय कार्य कोड : MTE-08/टी एम ए/2026
अधिकतम अंक: 100

1. बताइए निम्नलिखित में से कौन से कथन सत्य हैं अथवा कौन से असत्य? प्रत्युदाहरण अथवा संक्षिप्त उपपत्ति की सहायता से अपने अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। (10)

   i) आदि मान समस्या

   $\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2, \quad y(0) = 0$ का $-h < x < h$ रूप के किसी अंतराल में एक अद्वितीय हल है।

   ii) सभी परवलय जिनके शीर्ष मूलबिंदु पर हों और केन्द्र x-अक्ष पर हों की लंबकोणीय संछेदी $x^2 + 2y^2 = c^2$ होती है।

   iii) अवकल समीकरण

   $y'' - 4xy' + (4x^2 - 1)\, y = -3e^{x^2} \sin 2x$ का प्रसामान्य रूप

   $\frac{d^2v}{dx^2} + v = -3\sin 2x$ है, जहाँ $v = y\, e^{-x^2}$

   iv) आंशिक अवकल समीकरण $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = z^2$ का हल $z = -[y + f(x - y)]$ है।

   v) xy-समतल में आंशिक अवकल समीकरण $u_{xx} + x^2\, u_{xy} - \left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{4}\right) u_{yy} = 0$ अतिपरवलयिक होता है।

2. क) हल कीजिए : $\frac{dy}{dx} + xy = y^2\, e^{x^2/2} \sin x$. (3)

   ख) साधारण अवकल समीकरण (3)

   $y\, dx + (xy + x - 3y)\, dy = 0$ को रैखिक रूप में लिखिए और अतः उसका हल ज्ञात कीजिए।

   ग) यदि $y_1(x) = x^{-1}$ अवकल समीकरण (4)

   $2x^2y'' + 3xy' - y = 0, \quad x > 0$ का एक हल हो, तो समीकरण का दूसरा रैखिकतः स्वतंत्र हल ज्ञात कीजिए।

3. क) प्राचल विचरण विधि द्वारा समीकरण (5)

   $\frac{d^2y}{dx^2} - y = \frac{2}{1 + e^x}$ का हल ज्ञात कीजिए।

   ख) स्वतंत्र चर परिवर्तन–विधि द्वारा समीकरण (5)

   $(1 + x^2)^2\, y'' + 2x(1 + x^2)\, y' + 4y = 0$ का हल ज्ञात कीजिए।

4. क) अवकल समीकरण (3)

$(6xy - 3y^2 + 2y)\, dx + 2(x - y)\, dy = 0$ का समाकलन गुणक ज्ञात कीजिए और इसे हल कीजिए।

ख) m के सभी धनात्मक पूर्णांक मानों के लिए $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + y = x^m$ को हल कीजिए। (3)

ग) निम्नलिखित आदि मान समस्या को हल कीजिए : (4)

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 2y = -6\sin 2x - 18\cos 2x$$

$$y(0) = 2,\ y'(0) = 2.$$

5. क) हल कीजिए : $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\tan x\frac{dy}{dx} + 5y = e^x \sec x$. (4)

ख) समय $t = 0.01$ सेकेंड पर एक RLC परिपथ के संघारित्र में आवेश झ्ज्ञत कीजिए जबकि $L = 0.05$ हेनरी, $R = 2$ ओम, $C = 0.01$ फैरड, $E(t) = 0$, $q(0) = 5$ कूलम और $i(0) = 0$ हो। (3)

ग) हल कीजिए : $x\frac{dy}{dx} + y \ln y = x\, y\, e^x$. (3)

6. क) निम्नलिखित अवकल समीकरणों को हल कीजिए :

(i) $\left(\frac{dy}{dx} - 1\right)^2 \left(\frac{d^2y}{dx^2} + 1\right)^2 y = \sin^2(x/2) + e^x + x$. (3)

(ii) $2x^2 y\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) + 4y^2 = x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2xy\left(\frac{dy}{dx}\right)$. (4)

ख) बाह्य आवर्ती बल की क्रिया के अंतर्गत अवमंदित कंपन तंत्र का अवकल समीकरण (3)

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2m_0\frac{dx}{dt} + n^2x = a\cos pt \quad \text{है।}$$

दिखाइए कि यदि $n > m_0 > 0$ हो तब अवकल समीकरण का पूरक फलन उन कंपनों को निरूपित करता है जो शीघ्र अवमंदित हो जाएंगी। आवर्ती फलनों के पदों में विशिष्ट समाकल ज्ञात कीजिए।

7. क) जाँच कीजिए कि फैफियन अवकल समीकरण (3)

$$yz\, dx + (x^2y - zx)\, dy + (x^2z - xy)\, dz = 0$$

समाकलनीय है और फिर इसका समाकल ज्ञात कीजिए।

ख) जैकोबी विधि द्वारा समीकरण (3)

$x^2\ \frac{\partial u}{\partial x} - \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 - a\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 = 0$ का हल ज्ञात कीजिए।

ग) दिखाइए कि $2z = (ax + y)^2 + b$ जहाँ a, b स्वेच्छ अचर हैं, समीकरण $px + qy - q^2 = 0$ का पूर्ण समाकल है। (4)

8. क) निम्नलिखित अवकल समीकरणों को हल कीजिए : (6)

(i) $x^2p + y^2q = (x + y)\ z$.

(ii) $\sqrt{p} - \sqrt{q} + 3x = 0$.

ख) अवकल समीकरण $(x^2 - yz)\ p + (y^2 - zx)\ q = z^2 - xy$ का समाकल पृष्ठ ज्ञात कीजिए जो रेखा $x = 1,\ y = 0$ से होकर जाता हो। (4)

9. क) चर–पृथक्करण विधि द्वारा $u_{xt} = e^{-t} \cos x$ को हल कीजिए जहाँ, $u(x, 0) = 0,\ \frac{\partial u}{\partial t}(0, t) = 0$. (3)

ख) लंबाई ℓ वाली छड़ी का तापमान ज्ञात कीजिए जिसके दोनों सिरे ऊष्मारोधी हैं जहां, छड़ी का प्रारंभिक तापमान $\sin\frac{\pi x}{\ell}$ है। (7)

10. क) निम्नलिखित अवकल समीकरणों को हल कीजिए :

(i) $[D^3 - DD'^2 - D^2 + DD']\ z = 0$. (2)

(ii) $[D^4 - D'^4 - 2D^2\ D'^2]\ z = 0$. (2)

(iii) $[D^2 - 2DD' + D'^2]\ z = 12xy$. (3)

ख) दिखाइए कि $a^2u_{xx} = u_{tt}$ द्वारा चरों का परिवर्तन करके तरंग समीकरण $u_{\xi\eta} = 0$ को $\xi = x - at,\ \eta = x + at$ के रूप में समानीत किया जा सकता है। (3)