

**BACHELOR OF SCIENCE/BACHELOR
OF ARTS [B. SC.(G)/B. A.(G)/BSCM]**

Term-End Examination

December, 2024

BMTC-131 : CALCULUS

Time : 3 Hours

Maximum Marks : 100

Note : (i) *Question No. 1 is compulsory.*

(ii) *Attempt any **eight** questions from
Question No. 2 to 10.*

(iii) *Use of calculator is not allowed.*

1. Which of the following statements are true and which are false ? Give a short proof or a counter-example, in support of your answer : 20

(i) If $\mathbf{Z}, \mathbf{A} = \{x \in \mathbf{Q} \mid x \geq \sqrt{3}\}, \mathbf{U} = \mathbf{Q}$, then

$$\mathbf{A}^C \cup \mathbf{Z}^C = \mathbf{Q} - \{1, 2, 3, \dots\}.$$

- (ii) The value of k for which the function f defined by :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2, & \text{if } x < 1 \\ kx - 2, & \text{if } x \geq 1 \end{cases}$$

is continuous at $x = 1$ is 0.

- (iii) The only solution of the equation :

$$\log x = \log \left(\frac{x^2}{1-x^2} \right) - \log \left(\frac{2x}{1+x} \right)$$

is $x = \frac{1}{2}$.

- (iv) The maximum possible domain of a

function f given by $f(x) = \frac{4-x^2}{\sqrt{x^2+x}}$ is

$\mathbf{R} - \{0,1\}$.

- (v) The curve $\frac{4}{x^2} - \frac{9}{y^2} = 1$ has no asymptotes

parallel to axes.

(vi) $\frac{d}{dx}(\sin \sqrt{x}) \neq \frac{d}{dx}(\sqrt{\sin x})$.

(vii) $\lim_{x \rightarrow -\frac{5}{4}} \frac{16x^2 - 25}{4x + 5} = 10$.

(viii) The function f , defined by $f(x) = |x - 2|$ is differentiable at $x = 2$.

(ix) $\left\{-\frac{1}{2}, 0, 1\right\} \in \mathbf{Q} \times \mathbf{Z} \times \mathbf{N}.$

(x) If $f(x) = x^3$ and $g(x) = 2x + 1$, then $f \circ g(1) = g \circ f(1).$

2. (a) Find all the roots α, β and γ of the cubic equation $3x^3 + 11x^2 + 12x + 4 = 0$ such that the roots are in H.P. 5

(b) Prove that the function $f : \mathbf{R} \rightarrow]1, \infty[$ defined as $f(x) = 3^{2x} + 1$ is invertible and find a formula for the inverse. 5

3. (a) If $y = \sin x$ and n is any positive integer, then find $y_n^2 + y_{n+1}^2.$ 5

(b) Find the n th Taylor's polynomial for $\frac{1}{x}$ about $x = 1.$ 5

4. (a) Find $\frac{dy}{dx}$, when $y = x^{(x^x)}$. 5

(b) Evaluate : 5

$$\int_{-1}^2 (|x| + |x-1|) dx$$

5. (a) Test the continuity and differentiability of the function : 5

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \geq 1 \\ 1 - x, & x < 1 \end{cases}$$

at $x = 1$.

(b) Draw the rough sketch of the curve $r^2 = 3r \sin \theta$. 5

6. (a) Find the fourth roots of the complex number $1+i$ and show the solution geometrically. 5

(b) A bee follows the trajectory $x = t - 3 \sin t$ and $y = 4 - 3 \cos t$, where $t \geq 0$. It lands on a wall at time $t = 10$. At what time was the bee flying horizontally ? 5

7. Trace the curve $y^2(a+x) = x^2(a-x)$, $a > 0$,
stating all the properties you use to trace it. 10
8. (a) Using the ε - δ definition of limit, find δ
such that $\lim_{x \rightarrow 2} (4x+5) = 13$; $\varepsilon = 0.04$. 5
- (b) Verify Lagrange's mean value theorem for
the function f , defined by $f(x) = x^3$ on the
interval $[-1,1]$. 5
9. (a) Find the area of the region bounded by the
curves $y = x^2$ and $y = x^3$. 5
- (b) Find all possible relative extreme values of
the function f defined by
 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$ by using first
derivative test. 5

10. (a) Find the length of the curve given by the equations $x = 2\cos t + 3$ and $y = 2\sin t + 4$;

$$0 \leq t \leq 2\pi . \qquad 5$$

- (b) If $x = a(\theta - \sin \theta)$, $y = a(1 - \cos \theta)$, find $\frac{d^2y}{dx^2}$

$$\text{at } \theta = \pi . \qquad 5$$

BMTC-131

विज्ञान स्नातक/कला स्नातक
 [बी. एस-सी. (जी.)/ बी. ए. (जी.)/
 बी. एस. सी. एम.]
 सत्रांत परीक्षा
 दिसम्बर, 2024
 बी.एम.टी.सी.-131 : कलन

समय : 3 घण्टे

अधिकतम अंक : 100

नोट : (i) प्रश्न सं. 1 करना अनिवार्य है।

(ii) प्रश्न सं. 2 से 10 तक कोई आठ प्रश्न
 कीजिए।

(iii) कैल्कुलेटर का प्रयोग करने की अनुमति नहीं
 है।

1. निम्नलिखित में से कौन-से कथन सत्य और कौन-से
 कथन असत्य हैं? अपने उत्तर के पक्ष में संक्षिप्त उपपत्ति
 या प्रति-उदाहरण दीजिए : 20

(i) यदि $Z, A = \{x \in \mathbf{Q} \mid x \geq \sqrt{3}\}, U = \mathbf{Q}$ हैं, तो

$A^C \cup Z^C = \mathbf{Q} - \{1, 2, 3, \dots\}$ होगा।

(ii) k का वह मान, जिसके लिए

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2, & \text{यदि } x < 1 \\ kx - 2, & \text{यदि } x \geq 1 \end{cases}$$

द्वारा परिभाषित फलन $f, x=1$ पर संतत है, 0 है।

(iii) समीकरण $\log x = \log \left(\frac{x^2}{1-x^2} \right) - \log \left(\frac{2x}{1+x} \right)$ का

केवल हल $x = \frac{1}{2}$ है।

(iv) $f(x) = \frac{4-x^2}{\sqrt{x^2+x}}$ द्वारा परिभाषित फलन f का

अधिकतम संभावित प्रांत $\mathbf{R} - \{0,1\}$ है।

(v) वक्र $\frac{4}{x^2} - \frac{9}{y^2} = 1$ की अक्षों के समानांतर कोई

अनंतस्पर्शी नहीं है।

(vi) $\frac{d}{dx}(\sin \sqrt{x}) \neq \frac{d}{dx}(\sqrt{\sin x})$

(vii) $\lim_{x \rightarrow -\frac{5}{4}} \frac{16x^2 - 25}{4x + 5} = 10$

(viii) $f(x) = |x - 2|$ द्वारा परिभाषित फलन $f, x = 2$ पर अवकलनीय है।

(ix) $\left\{-\frac{1}{2}, 0, 1\right\} \in \mathbf{Q} \times \mathbf{Z} \times \mathbf{N}$

(x) यदि $f(x) = x^3$ और $g(x) = 2x + 1$ हैं, तो
 $f \circ g(1) = g \circ f(1)$ ।

2. (क) घन बहुपद $3x^3 + 11x^2 + 12x + 4 = 0$ के सभी मूल α, β और γ , जो कि H.P. में हैं, निकालिए। 5

(ख) $f(x) = 3^{2x} + 1$ द्वारा परिभाषित फलन $f : \mathbf{R} \rightarrow]1, \infty[$ व्युत्क्रमणीय हैं और व्युत्क्रम का सूत्र निकालिए। 5

3. (क) यदि $y = \sin x$ और n एक धनात्मक पूर्णांक है, तो $y_n^2 + y_{n+1}^2$ ज्ञात कीजिए। 5

(ख) $\frac{1}{x}$ के लिए $x=1$ के सापेक्ष n वीं टेलर बहुपद

निकालिए। 5

4. (क) $y = x^{(x^x)}$ के लिए $\frac{dy}{dx}$ निकालिए। 5

(ख) $\int_{-1}^2 (|x| + |x-1|) dx$ का मान निकालिए। 5

5. (क) फलन 5

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \geq 1 \\ 1 - x, & x < 1 \end{cases}$$

की $x=1$ पर सततता और अवकलनीयता का परीक्षण कीजिए।

(ख) वक्र $r^2 = 3r \sin \theta$ का रफ स्कैच खींचिए। 5

6. (क) सम्मिश्र संख्या $1+i$ का चतुर्थ मूल ज्ञात कीजिए

और इसे ज्यामिति रूप में भी दर्शाइए। 5

(ख) एक मक्खी प्रक्षेपवक्र $x = t - 3 \sin t$ और

$y = 4 - 3 \cos t$, जहाँ $t > 0$, में उड़ती है। यह

$t = 10$ समय पर दीवार पर आती है। मक्खी

कितने समय पर क्षैतिज रूप से उड़ रही थी ? 5

7. वक्र $y^2(a+x) = x^2(a-x)$, $a > 0$ का आरेखण कीजिए और ऐसा करने में प्रयोग किए गये गुणधर्मों को लिखिए। 10

8. (क) सीमा की ε - δ परिभाषा का प्रयोग करके δ का वह मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए

$$\lim_{x \rightarrow 2} (4x + 5) = 13, \quad \varepsilon = 0.04 \text{ है।} \quad 5$$

- (ख) $f(x) = x^3$ द्वारा परिभाषित फलन f के लिए अंतराल $[-1, 1]$ पर लैग्रांज माध्यमान प्रमेय सत्यापित कीजिए। 5

9. (क) वक्रों $y = x^2$ और $y = x^3$ से घिरे प्रदेश का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। 5

- (ख) प्रथम अवकलज परीक्षण का प्रयोग करके $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$ द्वारा परिभाषित फलन f के सभी संभव सापेक्ष इष्टतम मान ज्ञात कीजिए। 5

10. (क) समीकरणों $x = 2\cos t + 3$ और $y = 2\sin t + 4$; $0 \leq t \leq 2\pi$, द्वारा दिए गए वक्र की लंबाई ज्ञात कीजिए। 5

- (ख) यदि $x = a(\theta - \sin \theta)$, $y = a(1 - \cos \theta)$ है, तो $\theta = \pi$ पर $\frac{d^2y}{dx^2}$ ज्ञात कीजिए। 5

× × × × × × ×