No. of Printed Pages : 12 **BMTC–133**

BACHELOR OF SCIENCE (GENERAL)/ BACHELOR OF ARTS (GENERAL) (BSCG/BAG)

Term-End Examination

December, 2024

BMTC–133 : REAL ANALYSIS

Time : 3 Hours *Maximum Marks : 100*

Note : *(i) Question No.* ***1*** *is compulsory.*

(ii) Do any ***six*** *questions from Question Nos.* ***2*** *to* ***8****.*

(iii) Use of calculator is not allowed.

---

1. Which of the following statements are true *or* false ? Give reasons for your answer in the form of a short proof or a counter-example, whichever is appropriate for each statement :

2×5=10

(a) The negation of $p \vee (\sim q)$ is $(p \vee q) \wedge (\sim p)$.

(b) The equation $2x^3 - 8x - 3 = 0$ has no real root between -2 and -1.

(c) The function f defined by :

$$f(x) = -|x+7|, \quad \forall x \in \mathbf{R}$$

has a local maxima.

(d) The series :

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \ldots\ldots..$$

is a divergent series.

(e) An integrable function can have finitely many points of discontinuity.

2. (a) Using the principle of induction, prove that $n^3 + 2n$ is divisible by 3, for all $n \in \mathbf{N}$. 5

(b) Show that the sequence $(a_n)_{n\in \mathrm{N}}$, where $a_n = \dfrac{n^2-1}{n^2+1}$, is monotone as well as bounded. 5

(c) Find the radius of convergence of the power series $\sum a_n x^n$, where $a_n = \dfrac{(n!)^2}{(2n+1)!}$.

5

3. (a) Show that for every $x \in \mathbf{R}^+$, there exists some $n \in \mathbf{N}$ such that $n \leq x+1 < n+1$. 5

(b) Show that the series :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3^n}+\frac{2}{n(n+1)}\right)$$

is convergent. Also calculate its sum. 5

(c) Show that for the function $f(x) = 4x^3 - 3x^2 + 2x + 1$, there exists $c \in]1,2[$ such that $f'(c) = 20$. Also find a value for such a point c. 5

4. (a) "If limit of a sequence $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ exists, it exists uniquely." Prove or disprove. 5

(b) Test the convergence of series : 5

$$\frac{1^2}{2^2}+\frac{1^2 \cdot 3^2}{2^2 \cdot 4^2}+\frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2}+\dots\dots\dots$$

(c) Let $\phi : [-1,4] \to \mathbf{R}$ be defined by :

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, & \text{for } -1 \leq x < 1 \\ -1, & \text{for } 1 \leq x < 2 \\ 2, & \text{for } 2 \leq x < 3 \\ -2, & \text{for } 3 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

Show that ϕ is integrable. 5

5. (a) Find the pointwise limit of the following sequence of functions, if it exists : 5

$(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$, where $f_n : [0, \infty[\to \mathbf{R}$ is given by

$f_n(x) = \frac{1}{2 + 3x^n}$.

(b) Check whether the following set is closed or not : 4

$$S = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\frac{n}{n+1}, \frac{n+1}{n} \right].$$

(c) Test the following series for convergence : 6

(i) $\frac{1}{2} + \frac{5}{2^3} + \frac{9}{2^5} + \ldots\ldots\ldots$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$

6. (a) For a given sequence, $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$, suppose $|a_{n+1} - a_n| < \frac{1}{3^n}$, $\forall n \in \mathbf{N}$. Show that this sequence is convergent. 6

(b) Show that $f(x) = \frac{1}{x^3 + x}$ is uniformly continuous on $[2,3]$. 4

(c) Let $f(x) = 2x + 3, x \in [0,1]$. Let P_n be the tagged partition formed by the sub-intervals :

$$I_1 = \left[0, \frac{1}{n}\right], I_2 = \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right], \ldots\ldots, I_i = \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right], \ldots\ldots$$

and $I_n = \left[\frac{n-1}{n}, 1\right]$, where the tags are $t_i = \frac{i}{n}, i = 1, 2, \ldots., n$. Calculate the Riemann sum. 5

7. (a) Prove that union of an arbitrary collection of open sets is open. Is it also true for an intersection of arbitrary collection of such sets ? Justify. 6

(b) Apply the Cauchy integral test to find : 4

$$\lim_{n \to \infty} \left[\frac{1}{n} + \frac{n^2}{(n+1)^3} + \frac{n^2}{(n+2)^3} + \ldots. + \frac{1}{8^n}\right].$$

(c) If the functions f and g are continuous on $[a, b]$, derivable in $]a, b[$ and $f'(x) = g'(x)$, $\forall\, x \in]a, b[$, then check whether or not $f \circ g$ is a constant function. 5

8. (a) Examine the following function for maximum and minimum values : 5

$$f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 - 1.$$

(b) Show that the sequence $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$, where $f_n : [0, \infty[\to \mathbf{R}$, $f_n(x) = \dfrac{n^2 x}{1 + n^2 x}$ is not uniformly convergent on $[0, \infty[$. 5

(c) Show that $\left(\dfrac{(-1)^n}{8^n} \right)_{n \in \mathbf{N}}$ is a Cauchy sequence. 5

BMTC–133

बी. एस-सी. (सामान्य)/बी. ए. (सामान्य)

(बी. एस-सी. जी./ बी. ए. जी.)

सत्रांत परीक्षा

दिसम्बर, 2024

बी.एम.टी.सी.–133 : वास्तविक विश्लेषण

समय : 3 घण्टे *अधिकतम अंक : 100*

नोट : *(i) प्रश्न संख्या 1* ***अनिवार्य*** *है।*

(ii) प्रश्न सं. 2 से 8 तक किन्हीं ***छः*** *प्रश्नों के उत्तर दीजिए।*

(iii) कैल्कुलेटर के उपयोग की अनुमति नहीं है।

---

1. निम्नलिखित में से कौन-से कथन सत्य और कौन-से कथन असत्य हैं ? प्रत्येक कथन के अपने उत्तर के लिए एक संक्षिप्त उपपत्ति या एक प्रति-उदाहरण के रूप में (जो भी उपयुक्त हो) कारण दीजिए : 2×5=10

(क) $p \vee (\sim q)$ का निषेधन $(p \vee q) \wedge (\sim p)$ है।

(ख) समीकरण $2x^3 - 8x - 3 = 0$ का -2 और -1 के बीच में कोई वास्तविक मूल नहीं है।

(ग) $f(x) = -|x+7|, \forall x \in \mathbf{R}$ द्वारा परिभाषित फलन f का एक स्थानीय उच्चिष्ठ होता है।

(घ) श्रेणी $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + ...$ एक अपसारी श्रेणी है।

(ङ) एक समाकलनीय फलन में असंततता के परिमित रूप से अनेक बिन्दु हो सकते हैं।

2. (क) आगमन के सिद्धान्त का उपयोग करते हुए, सिद्ध कीजिए कि सभी $n \in \mathbf{N}$ के लिए, 3 द्वारा $n^3 + 2n$ विभाज्य है। 5

(ख) दर्शाइए कि अनुक्रम $(a_n)_{n \in \mathrm{N}}$, जहाँ $a_n = \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1}$ है, एकदिष्ट है और परिबद्ध भी है। 5

(ग) घात श्रेणी $\sum a_n x^n$ की अभिसारिता की त्रिज्या ज्ञात कीजिए, जहाँ $a_n = \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$ है। 5

3. (क) दर्शाइए कि प्रत्येक $x \in \mathbf{R}^+$ के लिए, किसी $n \in \mathbf{N}$ का अस्तित्व है ताकि $n \le x + 1 < n + 1$ है। 5

(ख) दर्शाइए कि श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3^n} + \frac{2}{n(n+1)} \right)$ अभिसारी है। साथ ही, इसका योग भी परिकलित कीजिए। 5

(ग) दर्शाइए कि फलन $f(x) = 4x^3 - 3x^2 + 2x + 1$ के लिए, $c \in]1,2[$ का अस्तित्व है, ताकि $f'(c) = 20$ है। साथ ही, ऐसे बिन्दु c के लिए एक मान भी ज्ञात कीजिए। 5

4. (क) "यदि अनुक्रम $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ की सीमा का अस्तित्व है, तो उसका अस्तित्व अद्वितीय रूप से होता है।" सिद्ध या असिद्ध कीजिए। 5

(ख) श्रेणी $\frac{1^2}{2^2} + \frac{1^2 \cdot 3^2}{2^2 \cdot 4^2} + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \ldots\ldots..$ की अभिसारिता की जाँच कीजिए। 5

(ग) मान लीजिए कि :

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, & -1 \le x < 1 \text{ के लिए} \\ -1, & 1 \le x < 2 \text{ के लिए} \\ 2, & 2 \le x < 3 \text{ के लिए} \\ -2, & 3 \le x \le 4 \text{ के लिए} \end{cases}$$

द्वारा $\phi : [-1, 4] \to \mathbf{R}$ परिभाषित है। दर्शाइए कि ϕ समाकलनीय है। 5

5. (क) फलनों के निम्नलिखित अनुक्रम की बिंदुशः सीमा ज्ञात कीजिए, यदि उसका अस्तित्व है : 5

$(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$, जहाँ $f_n : [0, \infty[\to \mathbf{R}$ को $f_n(x) = \frac{1}{2 + 3x^n}$ द्वारा दिया जाता है।

(ख) जाँच कीजिए कि निम्नलिखित समुच्चय संवृत है या नहीं : 4

$$S = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left[\frac{n}{n+1}, \frac{n+1}{n}\right]$$

(ग) अभिसारिता के लिए निम्नलिखित श्रेणियों की जाँच कीजिए : 6

(i) $\frac{1}{2} + \frac{5}{2^3} + \frac{9}{2^5} + ...$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$

6. (क) एक दिए हुए अनुक्रम $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ के लिए, मान लीजिए कि $|a_{n+1} - a_n| < \frac{1}{3^n}, \quad \forall n \in \mathbf{N}$ है। दर्शाइए कि यह अनुक्रम अभिसारी है। 6

(ख) दर्शाइए कि $[2,3]$ पर $f(x) = \frac{1}{x^3 + x}$ एकसमानतः संतत है। 4

(ग) मान लीजिए कि $f(x) = 2x + 3, x \in [0,1]$ है। मान लीजिए कि P_n उप-अंतरालों $I_1 = \left[0, \frac{1}{n}\right]$, $I_2 = \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right], ..., I_i = \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right], ...,$ तथा

$I_n = \left[\frac{n-1}{n}, 1\right]$ द्वारा बनाए जाने वाले चिह्नित विभाजन हैं, जहाँ चिह्न (टैग) $t_i = \frac{i}{n}; i = 1, 2, ..., n$ हैं। रीमान योगफल ज्ञात कीजिए। 5

7. (क) सिद्ध कीजिए कि विवृत समुच्चयों के एक स्वेच्छ संग्रह का सम्मिलन विवृत होता है। क्या यह ऐसे ही समुच्चयों के स्वेच्छ संग्रह के प्रतिच्छेदन के लिए भी सत्य है ? पुष्टि कीजिए। 6

(ख) $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n} + \frac{n^2}{(n+1)^3} + \frac{n^2}{(n+2)^3} + ... + \frac{1}{8^n}\right]$ ज्ञात करने के लिए, कौशी समाकल परीक्षण का अनुप्रयोग कीजिए। 4

(ग) यदि फलन f और g अंतराल $[a, b]$ पर संतत हैं, $]a, b[$ में अवकलनीय हैं तथा $f'(x) = g'(x)$, $\forall\, x \in]a, b[$ है, जाँच कीजिए कि क्या $f \circ g$ एक अचर फलन है या नहीं। 5

8. (क) अधिकतम और निम्नतम मानों के लिए, निम्नलिखित फलन की जाँच कीजिए : 5

$$f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 - 1$$

(ख) दर्शाइए कि अनुक्रम $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ अंतराल $[0,\infty[$ पर एकसमानतः अभिसारी नहीं है, जहाँ

$$f_n : [0,\infty[\to \mathbf{R},\ f_n(x) = \frac{n^2 x}{1+n^2 x}$$ है। 5

(ग) दर्शाइए कि $\left(\frac{(-1)^n}{8^n}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ एक कौशी अनुक्रम है। 5

× × × × × × ×