No. of Printed Pages : 20 **BMTE–141**

BACHELOR OF SCIENCE (GENERAL)

(BSCG)

Term-End Examination

December, 2024

BMTE-141 : LINEAR ALGEBRA

Time : 3 Hours *Maximum Marks : 100*

Note **:** (*i*) *There are eight questions in this paper.*

(*ii*) *The* ***eighth*** *question is compulsory.*

(*iii*) *Do any* ***six*** *questions from question no. 1 to question no. 7.*

(*iv*) *Use of calculators is not allowed.*

1. (a) Let $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ and $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. Which of the following operations are possible ?

(i) AB + C

(ii) CA + B

Justify your answers. Perform the operations that are possible. 3

(b) Find the rank and nullity of the matrix :

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

using row reduction. 3

(c) Determine the equation of the plane corresponding to the vector space spanned by the vectors $(0,1,1)$ and $(-1,1,1)$. 3

(d) Find the characteristic polynomial of the matrix :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Verify the Cayley-Hamilton theorem for matrix A. 2

(e) Define the norm of a vector in an inner product space. Find the norm of the vector $(1-i, i, 1+i) \in \mathbf{C}^3$. 2

(f) Find the volume of the box spanned by the vectors $(1,1,-1), (1,0,1)$ and $(2,1,1)$. 2

2. (a) If the matrix of a linear transformation $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ with respect to the standard basis is :

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

find the linear transformation. 3

(b) Find the rank and signature for each of the forms $x_1^2 + x_2^2 + x_4^2$ and $x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2$. Are these forms equivalent ? Justify your answer. 3

(c) Let $V_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} \middle| a, c \in \mathbf{R} \right\}$ and $V_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & v \\ r & 0 \end{bmatrix} \middle| v, r \in \mathbf{R} \right\}$ be subspaces of $M_2(\mathbf{R})$. Prove that $M_2(\mathbf{R}) = V_1 + V_2$. Is $M_2(\mathbf{R}) = V_1 \oplus V_2$? Justify your answer. 3

(d) Let $u_1 = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right)$ and $u_2 = \left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5} \right)$. Show that $\{u_1, u_2\}$ forms an orthonormal basis for $\mathbf{R}^2$. Write the vector (1,0) as a linear combination of u_1 and u_2. 2

(e) Let A be a 4×4 matrix. Write down the elementary matrices with which, when we multiply A on the left, will perform the following row operations on A : 2

(i) $R_3 \leftrightarrow R_2$

(ii) $R_4 \rightarrow R_4 - 3R_1$

(f) Show that the matrix $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & x \\ x & 0 & -1 \end{bmatrix}$ is invertible for all real values of x. 2

3. (a) Find the conditions on b_1, b_2 and b_3, so that the following system of equations is consistent : 7

$$x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = b_1$$

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 = b_2$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = b_3$$

(b) Find the adjugate of the matrix :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Further, find the inverse of A using the adjugate. 5

(c) Is the matrix :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

in Row Reduced Echelon form ? Is it in Row Reduced form ? Justify your answer. If it is not in Row Reduced Echelon form, use row operations to reduce it to Row Reduced Echelon form. 3

4. (a) Check whether the matrix :

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

is diagonalisable. If it is diagonalisable, find a diagonal matrix D and an invertible matrix P such that $P^{-1}AP = D$. 8

(b) Find the inverse of the following matrix using Cayley-Hamilton theorem : 5

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(c) Find the values of $a, b \in \mathbf{C}$ for which the matrix :

$$\begin{bmatrix} 1 & i & 1+b \\ a & 1 & 2-i \\ 1-i & 2+i & 1 \end{bmatrix}$$

is Hermitian. 2

5. (a) Let :

$$V_1 = \left[\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}\right\}\right]$$

and

$$V_2 = \left[\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}\right\}\right]$$

be subspaces of $\mathbf{R}^3$. Find a basis for $V_1 + V_2$ and spanning set for $V_1 \cap V_2$. 7

(b) Let $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ be defined by $T((x, y)) = (x - y, x, y)$ and $S : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ be defined by $S((x, y, z)) = (x + y, y - z)$. Let B_1 and B_2 be the standard bases of $\mathbf{R}^2$ and $\mathbf{R}^3$, respectively. Check that : 8

$$[T \circ S]_{B_2}^{B_2} = [T]_{B_2}^{B_1} \cdot [S]_{B_1}^{B_2}.$$

6. (a) Find the orthogonal canonical reduction of the quadratic form $x^2 + y^2 + 4xy - 2xz + 2yz$. Also, find its principal axes. 9

(b) Let W_1 and W_2 be two subspaces of a vector space V. Prove that if $W_1 \cup W_2$ is a subspace of V, then $W_1 \subseteq W_2$ or $W_2 \subseteq W_1$. 3

(c) Define the coset of a subspace. Let :

$$W = \{(x, y, z) \mid x + 2y - 3z = 0\} \subseteq \mathbf{R}^3$$

Check whether vectors $(3, 1, 2)$ and $(1, 1, 3)$ are in the same coset of W or not. 3

7. (a) Let $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ be an ordered basis of $\mathbf{R}^3$, where $u_1 = (1, 1, -1), u_2 = (1, 0, -1)$ and $u_3 = (0, 1, 1)$. Use Gram-Schmidt orthogonalisation process on B to find an orthonormal basis for $\mathbf{R}^3$. 5

(b) Let $B = \{(1, -1, 3), (0, 1, -1), (0, 3, -2)\}$ be a basis of $\mathbf{R}^3$. Find the dual basis of B. 5

(c) Check whether the set :

$$S = \{(a_1, a_2, ..., a_n) \mid a_i \in \mathbf{R}, a_n > 0\}$$

is a subspace of $\mathbf{R}^n$ or not. 3

(d) If v_1, v_2 and v_3 are linearly independent vectors in a vector space V over $\mathbf{C}$, show that $v_1, v_1 + v_2, v_1 + v_3$. 2

8. Which of the following statements are true and which are false ? Justify your answer with a short proof or a counter-example, whichever is appropriate : 5×2=10

(a) Similar matrices have the same characteristic polynomial.

(b) The subspace $W = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x + 3y = z\}$ of $\mathbf{R}^3$ is of dimension 2.

(c) If A is an invertible matrix, 0 is not an eigen value of A.

(d) There exist vectors u and v in an inner product space such that $\|u\|=2, \|v\|=7$, $\|u+v\|=8$ and $\|u-v\|=6$.

(e) If W_1 and W_2 are subspaces of a vector space V and $W_1 + W_2 = V$, then $W_1 \cap W_2 = \{0\}$.

BMTE–141

विज्ञान स्नातक (सामान्य)

(बी. एस. सी. जी.)

सत्रांत परीक्षा

दिसम्बर, 2024

बी.एम.टी.ई.-141 : रैखिक बीजगणित

समय : 3 घण्टे *अधिकतम अंक : 100*

नोट : (*i*) *इस प्रश्न पत्र में आठ सवाल हैं।*

(*ii*) ***आठवाँ*** *सवाल करना अनिवार्य है।*

(*iii*) *प्रश्न संख्या* ***1*** *से* ***7*** *तक कोई भी* ***छः*** *प्रश्न कीजिए।*

(*iv*) *कैल्कुलेटर के प्रयोग की अनुमति नहीं है।*

---

1. (क) मान लीजिए $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ और $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$। निम्नलिखित में से कौन-सी संक्रियाएँ साध्य हैं ?

(i) AB + C

(ii) CA + B

अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। जो संक्रियाएँ साध्य हैं वह कीजिए। 3

(ख) पंक्ति समानयन द्वारा आव्यूह $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ की जाति और शून्यता ज्ञात कीजिए। 3

(ग) सदिश $(0,1,1)$ और $(-1,1,1)$ द्वारा निर्धारित सदिश समष्टि के संगत समतल का समीकरण निर्धारित कीजिए। 3

(घ) आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ का अभिलाक्षणिक बहुपद ज्ञात कीजिए। आव्यूह A के लिए कैली-हैमिल्टन प्रमेय सत्यापित कीजिए। 2

(ङ) एक आंतरगुणन सदिश समष्टि में एक सदिश का मानक परिभाषित कीजिए। सदिश $(1-i, i, 1+i) \in \mathbf{C}^3$ का मानक ज्ञात कीजिए। 2

(च) सदिश $(1, 1, -1), (1, 0, 1)$ और $(2, 1, 1)$ द्वारा विस्तृत बक्स का आयतन ज्ञात कीजिए। 2

2. (क) यदि मानक आधार के सापेक्ष एक रैखिक संकारक $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ का मानक आधार के सापेक्ष आव्यूह $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, तो रैखिक संकारक ज्ञात कीजिए। 3

(ख) समघात $x_1^2 + x_2^2 + x_4^2$ और $x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2$ के जाति और चिह्नक निकालिए। क्या ये समघात तुल्य हैं ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। 3

(ग) मान लीजिए $V_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} \middle| a, c \in \mathbf{R} \right\}$ और $V_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & v \\ r & 0 \end{bmatrix} \middle| v, r \in \mathbf{R} \right\}$ $M_2(\mathbf{R})$ की उपसमष्टियाँ हैं। निरूपित कीजिए कि $M_2(\mathbf{R}) = V_1 + V_2$ । क्या $M_2(\mathbf{R}) = V_1 \oplus V_2$? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। 3

(घ) मान लीजिए $u_1 = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ और $u_2 = \left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$।

दिखाइए कि $\{u_1, u_2\}$ $\mathbf{R}^2$ का प्रसामान्य लांबिक आधार है। सदिश (1, 0) को u_1 और u_2 एक घात संचयन के रूप में लिखिए। 2

(ङ) मान लीजिए A एक 4×4 आव्यूह है। वह प्रारम्भिक आव्यूह लिखिए जिसको A की बाईं तरफ से गुणन करने पर A पर निम्नलिखित संक्रियाएँ होंगी : 2

(i) $R_3 \leftrightarrow R_2$

(ii) $R_4 \to R_4 - 3R_1$

(च) दिखाइए कि आव्यूह $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & x \\ x & 0 & -1 \end{bmatrix}$ x के सभी वास्तविक मान के लिए व्युत्क्रमणीय है। 2

3. (क) b_1, b_2 और b_3 पर प्रतिबंध निकालिए जिससे निम्नलिखित समीकरण निकाय संगत है : 7

$$x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = b_1$$

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 = b_2$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = b_3$$

(ख) आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ के सहखण्डज निकालिए। आगे सहखण्डज का प्रयोग करके A का व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए। 5

(ग) क्या आव्यूह :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

पंक्ति समानीत सोपानक रूप में है ? क्या यह पंक्ति समानीत रूप में है ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। यदि यह आव्यूह पंक्ति समानीत सोपानक रूप में नहीं है, तो पंक्ति संक्रियाओं के प्रयोग से आव्यूह को पंक्ति समानीत सोपानक रूप में समानीत कीजिए। 3

4\. (क) जाँच कीजिए कि आव्यूह $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

विकर्णनीय है। यदि विकर्णनीय है, तो एक विकर्ण आव्यूह D और व्युत्क्रमणीय आव्यूह P निकालिए जिससे $P^{-1}AP = D$। 8

(ख) कैली-हैमिल्टन विधि से आव्यूह :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

का व्युत्क्रम निकालिए। 5

(ग) $a, b, c \in \mathbf{C}$ के मान निकालिए जिससे आव्यूह

$\begin{bmatrix} 1 & i & 1+b \\ a & 1 & 2-i \\ 1-i & 2+i & 1 \end{bmatrix}$ हर्मिटीय है। 2

5. (क) मान लीजिए :

$$V_1 = \left[\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\-1\\2\end{bmatrix}\right\}\right]$$

और $$V_2 = \left[\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\2\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\4\\7\end{bmatrix}\right\}\right]$$

$\mathbf{R}^3$ की उपसमष्टियाँ हैं। $V_1 + V_2$ का एक आधार प्राप्त कीजिए और $V_1 \cap V_2$ का एक विस्तृतिक समुच्चय निकालिए। 7

(ख) मान लीजिए कि $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ $T((x, y)) = (x - y, x, y)$ द्वारा परिभाषित है और $S : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ $S((x, y, z)) = (x + y, y - z)$ द्वारा परिभाषित है। मान लीजिए B_1 और B_2 $\mathbf{R}^2$ और $\mathbf{R}^3$ के क्रमशः मानक आधार हैं। जाँच कीजिए कि : 8

$$[T \circ S]_{B_2}^{B_2} = [T]_{B_2}^{B_1} \cdot [S]_{B_1}^{B_2}$$

6. (क) द्विघात समघात :

$$x^2 + y^2 + 4xy - 2xz + 2yz$$

का लांबिक विहित समानयन ज्ञात कीजिए। इसका मुख्य अक्ष भी ज्ञात कीजिए। 9

(ख) मान लीजिए W_1 और W_2 सदिश समष्टि V की उपसमष्टियाँ हैं। निरूपित कीजिए कि यदि $W_1 \cup W_2$ उपसमष्टि है V की, तो $W_1 \subseteq W_2$ या $W_2 \subseteq W_1$। 3

(ग) एक सदिश समष्टि का सहसमुच्चय परिभाषित कीजिए। मान लीजिए :

$$W = \{(x, y, z) \mid x + 2y - 3z = 0\} \subseteq \mathbf{R}^3$$

जाँच कीजिए कि सदिश (3, 1, 2) और (1, 1, 3) W के एक ही सहसमुच्चय में हैं या नहीं। 3

7. (क) मान लीजिए $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ $\mathbf{R}^3$ का एक क्रमित आधार है, जहाँ $u_1 = (1, 1, -1), u_2 = (1, 0, -1)$ और $u_3 = (0, 1, 1)$। ग्राम-श्मिट लांबिकीकरण विधि का प्रयोग करके $\mathbf{R}^3$ का प्रसामान्य लांबिक आधार प्राप्त कीजिए। 5

(ख) मान लीजिए $B = \{(1, -1, 3), (0, 1, -1), (0, 3, -2)\}$ $\mathbf{R}^3$ का आधार है। B का द्वैत आधार निकालिए। 5

(ग) जाँच कीजिए कि :

$$S = \{(a_1, a_2, ..., a_n) \mid a_i \in \mathbf{R}, a_n > 0\}$$

$\mathbf{R}^n$ की उपसमष्टि है या नहीं। 3

(घ) यदि v_1, v_2 और v_3 **C** सदिश समष्टि V में रैखिकत: स्वतन्त्र हैं, तो दिखाइये कि $v_1, v_1 + v_2, v_1 + v_3$ भी रैखिकत: स्वतन्त्र हैं। 2

8. निम्नलिखित कथनों में से कौन–से कथन सत्य और कौन–से कथन असत्य हैं ? अपने उत्तर की पुष्टि एक लघु उपपत्ति या प्रत्युदाहरण द्वारा दीजिए, जो भी उचित है : 5×2=10

(क) समरूप आव्यूहों के अभिलाक्षणिक बहुपद समान हैं।

(ख) $\mathbf{R}^3$ की उपसमष्टि :

$$W = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x + 3y = z\right\}$$

की विमा 2 है।

(ग) यदि A एक व्युत्क्रमणीय आव्यूह है, तो 0, A का आइगेन मान नहीं है।

(घ) एक आंतर गुणन समष्टि में सदिश u और v होते हैं जिसके लिए $||u||=2, ||v||=7$, $||u+v||=8$ और $||u-v||=6$ ।

(ङ) यदि W_1 और W_2 सदिश समष्टि V की उपसमष्टियाँ हैं, और $W_1 + W_2 = V$ तो $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ ।

× × × × × × ×