No. of Printed Pages : 10 **BPHE–106/PHE–06**

BACHELOR OF SCIENCE (B. Sc.)

Term-End Examination

December, 2024

BPHE-106/PHE-06 : THERMODYNAMICS AND STATISTICAL MECHANICS

Time : 2 Hours *Maximum Marks : 50*

Note : *(i) All questions are compulsory, but internal choices are provided.*

(ii) You can use calculators.

(iii) Symbols have their usual meanings.

(iv) The values of physical constants are given at the end.

1. Answer any ***three*** parts : $5 \times 3 = 15$

(a) Define mean free path of a gas molecule. Show that for the zeroth order approximation (only one molecule in motion), the mean free path is given by : 1+4

$$\lambda = \frac{1}{\pi d^2 n}.$$

(b) Write the differential form of the first law of thermodynamics. Write the significance and limitations of the first law of thermodynamics. 1+2+2

(c) Three moles of a perfect gas occupy $0.06\ m^3$ and exert a pressure of $3\times10^5\ Nm^{-2}$. It is compressed isobarically to $0.05 m^3$. Calculate the work done on the gas and the change in the temperature. 3+2

(Take $R = 8.3 JK^{-1}mol^{-1}$)

(d) Assuming equal specific entropies of two phases, obtain the Ehrenfest's equation for second order phase transition. 5

(e) Define Fermi energy. Show that it is given by : 1+4

$$\varepsilon_F = \frac{h^2}{8m}\left(\frac{3N}{\pi V}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

2. Attempt any *one* part : 5×1=5

(a) Find out the number of degrees of freedom for a rigid diatomic molecule. Calculate the thermal energy associated with it. 3+2

(b) The efficiency of a Carnot engine operating between temperatures T_1 and T_2 is $\frac{1}{3}$. If the temperature of the sink is lowered by 70 K, the efficiency doubles. Calculate the source and sink temperatures. 5

3. Attempt any ***two*** parts : 5×2=10

(a) A monoatomic gas obeys van der Waals' equation. Its $T_c = 44.75$ K and $P_c = 26.86$ atm. Calculate the diameter of the gas atom. 5

(b) Show that the expression for adiabatic lapse rate is : 5

$$\frac{dT}{dh} = -\left(\frac{\gamma - 1}{\gamma}\right)\frac{Mg}{R}.$$

(c) Establish Boltzmann relation between entropy and probability : 4+1

$$S = k_B \ln W$$

State its significance.

4. Attempt any *one* part : 10×1=10

(a) Derive the equation of state for an adiabatic process given by $TV^{\gamma-1}$ = constant. Using it obtain the other two equations of state viz. : 7+3

$$\frac{T^{\gamma}}{P^{\gamma-1}} = \text{constant}$$

and PV^{γ} = constant.

(b) (i) Derive the expression for the difference of heat capacities at constant pressure and constant volume : 6

$$C_P - C_V = -T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P^2 \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T .$$

(ii) Prove that C_P can never be less than C_V. 2

(iii) Comment on the behaviour of the heat capacity values as the temperature approaches absolute zero. 2

5. Attempt any *one* part : 10×1=10

(a) Derive van der Waals' equation of state. Express it in terms of compressibility factor. Hence, show that the van der Waals' equation reduces to perfect gas equation at low pressure and high temperature. 5+2+3

(b) The thermodynamic probability of a boson system is given by :

$$W[\{N\}] = \prod_i \frac{(g_i + N_i - 1)!}{N!(g_i - 1)!}$$

Starting from this relation, obtain the expression for Bose-Einstein distribution function. Plot your result. 9+1

Physical constants :

$k_B = 1{\cdot}38 \times 10^{-23}\,JK^{-1}$

$1\ atm = 1{\cdot}03 \times 10^5\,Nm^{-2}$

$1\ cal = 4{\cdot}18\,J$

$N_A = 6.022 \times 10^{23}\,mol^{-1}$

$R = 8.3\ JK^{-1}\ mol^{-1}$

BPHE–106/PHE–06

विज्ञान स्नातक (बी. एस-सी.)

सत्रांत परीक्षा

दिसम्बर, 2024

बी.पी.एच.ई.-106/पी.एच.ई.-06 : ऊष्मागतिकी तथा सांख्यिकीय यांत्रिकी

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

नोट : *(i) सभी प्रश्न अनिवार्य हैं, परन्तु आंतरिक विकल्प दिए गए हैं।*

(ii) आप कैल्कुलेटर का प्रयोग कर सकते हैं।

(iii) प्रतीकों के अपने सामान्य अर्थ हैं।

(iv) भौतिक नियतांकों के मान अंत में दिए गए हैं।

---

1. किन्हीं ***तीन*** भागों के उत्तर दीजिए : 5×3=15

(क) गैस के अणु के लिए माध्य मुक्त पथ को परिभाषित कीजिए। शून्य कोटि सन्निकटन (केवल एक अणु गतिमान हो) के लिए सिद्ध कीजिए कि माध्य मुक्त पथ का व्यंजक $\lambda = \frac{1}{\pi d^2 n}$ होता है। 1+4

(ख) ऊष्मागतिकी के प्रथम नियम का अवकल रूप लिखिये। ऊष्मागतिकी के प्रथम नियम की सार्थकता तथा सीमाएँ बताइए। 1+2+2

(ग) आदर्श गैस के तीन मोल $0.06\ m^3$ आयतन घेरते हैं और $3\times10^5\ Nm^{-2}$ का दाब डालते हैं। इसे समदाबी रूप से संपीडित करके इसका आयतन $0.05\ m^3$ किया जाता है। गैस पर किया गया कार्य और इसके ताप में हुए परिवर्तन का मान परिकलित कीजिए। 3+2

($R = 8.3\ JK^{-1}mol^{-1}$ लें)

(घ) दो प्रावस्थाओं की विशिष्ट एन्ट्रॉपियाँ समान मानकर, द्वितीय कोटि प्रावस्था संक्रमण के लिए एहरेनफेस्ट समीकरण प्राप्त कीजिए। 5

(ङ) फर्मी ऊर्जा को परिभाषित कीजिए। सिद्ध कीजिए कि इसका व्यंजक $\varepsilon_F = \frac{h^2}{8m}\left(\frac{3N}{\pi V}\right)^{\frac{2}{3}}$ होता है। 1+4

2. किसी **एक** भाग का उत्तर लिखिये : 5×1=5

(क) एक दृढ़ द्विपरमाणुक अणु के लिए स्वातंत्र्य कोटि की संख्या ज्ञात कीजिए। इस अणु से सम्बद्ध तापीय ऊर्जा परिकलित कीजिए। 3+2

(ख) T_1 और T_2 तापों के बीच कार्य करने वाले एक कार्नो इंजन की दक्षता $\frac{1}{3}$ है। यदि अभिगम का ताप $70\,K$ घटा दिया जाए, तो दक्षता दुगुनी हो जाती है। स्रोत और अभिगम के ताप परिकलित कीजिए। 5

3. किन्हीं **दो** भागों को हल कीजिए : 5×2=10

(क) वाण्डर वाल्स समीकरण का अनुसरण करने वाली एकपरमाणुक गैस के लिए $T_c = 44.75\ K$ और $P_c = 26.86\ atm$ हैं। गैस के परमाणु का व्यास परिकलित कीजिए। 5

(ख) सिद्ध कीजिए कि रुद्धोष्म ह्रास दर का व्यंजक निम्नलिखित है : 5

$$\frac{dT}{dh} = -\left(\frac{\gamma - 1}{\gamma}\right)\frac{Mg}{R}$$

(ग) एन्ट्रॉपी और प्रायिकता के बीच बोल्ट्जमान सम्बन्ध $S = k_B \ln W$ प्रस्थापित कीजिए। इस सम्बन्ध की सार्थकता क्या है ? 4+1

4. किसी **एक** भाग को हल कीजिए : $10\times1=10$

(क) रुद्धोष्म प्रक्रम के लिए अवस्था समीकरण $TV^{\gamma-1} =$ अचर व्युत्पन्न कीजिए। इसका उपयोग करके अन्य दो अवस्था समीकरण : 7+3

$$\frac{T^{\gamma}}{P^{\gamma-1}} = \text{ अचर}$$

और $PV^{\gamma} =$ अचर

प्राप्त कीजिए।

(ख) (i) अचर दाब एवं अचर आयतन ऊष्माधारिताओं में अन्तर का व्यंजक

$$C_P - C_V = -T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P^2\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T$$

व्युत्पन्न कीजिए। 6

(ii) सिद्ध कीजिए कि C_P कभी भी C_V से कम नहीं हो सकता। 2

(iii) ताप के परम शून्य की तरफ बढ़ने पर ऊष्माधारिताओं के मानों के आचरण की चर्चा कीजिए। 2

5. किसी **एक** भाग को हल कीजिए : $10\times1=10$

(क) वाण्डर वाल्स अवस्था समीकरण व्युत्पन्न कीजिए। इसे संपीड्यता कारक के पदों में व्यक्त कीजिए। अतः सिद्ध कीजिए कि निम्न दाब और उच्च ताप पर वाण्डर वाल्स समीकरण आदर्श गैस समीकरण में परिवर्तित हो जाता है। 5+2+3

(ख) बोसॉन तंत्र की ऊष्मागतिकीय प्रायिकता हम निम्नलिखित व्यंजक से निरूपित करते हैं :

$$W[\{N\}] = \prod_i \frac{(g_i + N_i - 1)!}{N!(g_i - 1)!}$$

इस समीकरण से प्रारंभ करके बोस-आइन्स्टीन बंटन फलन का व्यंजक प्राप्त कीजिए। अपने परिणाम को आरेखित कीजिए। 9+1

भौतिक नियतांक :

$k_B = 1{\cdot}38\times10^{-23}\,JK^{-1}$

$1\ atm = 1{\cdot}03\times10^{5}\,Nm^{-2}$

$1\ cal = 4{\cdot}18\,J$

$N_A = 6.022\times10^{23}\,mol^{-1}$

$R = 8.3\ JK^{-1}\ mol^{-1}$

× × × × × × ×