No. of Printed Pages : 8

# MTE–01

## BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)

## Term-End Examination

## December, 2024

### Elective Course : Mathematics

### MTE-01 : CALCULUS

*Time : 2 Hours* *Maximum Marks : 50*

*Weightage : 70%*

---

***Note :*** *(i) Question* ***No. 1*** *is compulsory.*

*(ii) Attempt any* ***four*** *questions from Question Nos.* ***2*** *to* ***7****.*

*(iii) Use of calculator is not allowed.*

---

1. State whether the following statements are true *or* false. Justify your answers with a short proof or a counter-example : 10

   (i) The function $f$ defined by :

   $$f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 8x - 7$$

   is not increasing.

   (ii) If $f'(a) > 0$, then $f$ is concave upward at $x = a$.

(iii) $\frac{d}{dx}\left[\int_{x^2}^{4} \tan\left(3\sqrt{t}\right) dt\right] = 2x \tan 3x.$

(iv) The tangent to the curve $x^2 + y^2 = 4y$ at (0, 4) is parallel to $x$-axis.

(v) The function given by $f(x) = \ln\left(\frac{2 - x^5}{x^5 + 2}\right)$ is an odd function.

2. (a) Find the largest subset of **R**, the set of real numbers on which the function $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ defined below is continuous : 4

$$f(x) = \begin{cases} |x - 4|, & x < 1 \\ x + 3, & 1 \le x < 3 \\ 2x, & x \ge 3 \end{cases}$$

Also, draw a graph of $f$.

(b) Find the angle of intersection between the curves $3y^3 - 2x - 4y + 1 = 0$ and $x^2 + 2xy - y^2 + 2x = 0$ at the point (1, –1). 3

(c) Evaluate the integral $\int_1^2 \frac{dx}{x}$, using Trapezoidal rule with four intervals. Hence, find an approximate value of ln 2. 3

3. (a) Obtain a reduction formula for :

$$I_n = \int_0^{\pi/2} e^{-2x} \sin^n x \, dx$$

Hence, find the value of $I_4$. 6

(b) Find the area included between the curves $y^2 = 2x$ and $x^2 = 2y$. 4

4. (a) Verify Rolle's theorem for the function $f$, defined by $f(x) = x(x-3)e^{-x}$ on the interval [0, 3]. 4

(b) Find the length of the curve $3y^2 = x^3$ from the vertex (0, 0) to the point (3, 3). 4

(c) Find $\frac{dy}{dx}$, if $y = \sqrt{\sec x}$. 2

5. Trace the curve $x(y^2 - 3) = 6$, stating all the properties, you use for doing so. 10

6. (a) Find the derivative of : 4

$$(\sin x)^{\operatorname{cosec} x} + (\tan x)^{\cot x}$$

w.r.t. $x$.

(b) Evaluate : 4

$$\int_0^{\pi/2} \ln \cos x \, dx$$

(c) Find the value of λ, for which the function $f$ defined by :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos(x+3) - \cos(x-3)}{x}, & x \neq 0 \\ \lambda \sin 3 \quad , & x = 0 \end{cases}$$

is continuous at $x = 0$. 2

7. (a) Evaluate : 4

$$\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+1}}$$

(b) Find the first three terms of the Taylor's series of the function $f$, given by :

$$f(x) = 2 - \cot^{-1}(4x)$$

around 0.25. 4

(c) Evaluate : 2

$$\lim_{x \to \infty} \left[ \sqrt{4x^2 + x - 1} - \sqrt{4x^2 - 7x + 3} \right]$$

# MTE–01

## स्नातक उपाधि कार्यक्रम ( बी. डी. पी. )

## सत्रांत परीक्षा

## दिसम्बर, 2024

## ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित

## एम.टी.ई.-01 : कलन

*समय : 2 घण्टे* *अधिकतम अंक : 50*

*भारिता : 70%*

---

***नोट :*** *(i) प्रश्न सं. 1 अनिवार्य है।*

*(ii) प्रश्न संख्या 2 से 7 तक कोई* ***चार*** *प्रश्न हल कीजिए।*

*(iii) कैल्कुलेटर का प्रयोग करने की अनुमति नहीं है।*

---

1. निम्नलिखित में से कौन-से कथन सत्य और कौन-से असत्य हैं ? अपने उत्तर के पक्ष में एक संक्षिप्त उपपत्ति या प्रति-उदाहरण दीजिए : 10

   (i) $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 8x - 7$ द्वारा परिभाषित फलन $f$ वर्धमान नहीं है।

   (ii) यदि $f'(a) > 0$ है, तो $x = a$ पर $f$ उपरि अवतल है।

(iii) $\frac{d}{dx}\left[\int_{x^2}^{4} \tan\left(3\sqrt{t}\right) dt\right] = 2x \tan 3x$.

(iv) वक्र $x^2 + y^2 = 4y$ की (0, 4) पर स्पर्शरेखा $x$-अक्ष के समानांतर है।

(v) $f(x) = \ln\left(\frac{2 - x^5}{x^5 + 2}\right)$ द्वारा परिभाषित फलन एक विषम फलन है।

2. (क) **R**, वास्तविक संख्याओं का समुच्चय, का वह अधिकतम समुच्चय ज्ञात कीजिए जिस पर निम्नलिखित फलन $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ सतत् है : 4

$$f(x) = \begin{cases} |x - 4|, & x < 1 \\ x + 3, & 1 \le x < 3 \\ 2x, & x \ge 3 \end{cases}$$

$f$ का ग्राफ भी खींचिए।

(ख) वक्र $3y^3 - 2x - 4y + 1 = 0$ और $x^2 + 2xy - y^2 + 2x = 0$ का बिंदु (1, −1) का प्रतिच्छेदन कोण ज्ञात कीजिए। 3

(ग) समलंबी नियम का चार अंतरालों के साथ प्रयोग करके समाकलन $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ ज्ञात कीजिए। इस प्रकार $\ln 2$ का सन्निकटन मान ज्ञात कीजिए। 3

3. (क) $I_n = \int_0^{\pi/2} e^{-2x} \sin^n x \, dx$ का समानयन सूत्र ज्ञात कीजिए। इस प्रकार $I_4$ का मान ज्ञात कीजिए। 6

(ख) वक्रों $y^2 = 2x$ और $x^2 = 2y$ के बीच का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। 4

4. (क) अंतराल [0, 3] में, $f(x) = x(x-3)e^{-x}$ द्वारा परिभाषित फलन $f$ के लिए रौले प्रमेय सत्यापित कीजिए। 4

(ख) वक्र $3y^2 = x^3$ की शीर्ष (0, 0) से बिंदु (3, 3) तक की लंबाई ज्ञात कीजिए। 4

(ग) $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए, यदि $y = \sqrt{\sec x}$। 2

5. वक्र $x(y^2 - 3) = 6$ का अनुरेखण कीजिए और ऐसा करने के लिए प्रयोग किये गये गुणधर्म लिखिए। 10

6. (क) $(\sin x)^{\operatorname{cosec} x} + (\tan x)^{\cot x}$ का $x$ के सापेक्ष अवकलन ज्ञात कीजिए। 4

(ख) $\int_0^{\pi/2} \ln \cos x \, dx$ का मान ज्ञात कीजिए। 4

(ग) $\lambda$ का वह मान ज्ञात कीजिए, जिसके लिए निम्नलिखित फलन $x = 0$ पर सतत् है : 2

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos(x+3) - \cos(x-3)}{x}, & x \neq 0 \\ \lambda \sin 3 \quad , & x = 0 \end{cases}$$

7. (क) $\int \dfrac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+1}}$ का मान ज्ञात कीजिए। 4

(ख) $f(x) = 2 - \cot^{-1}(4x)$ द्वारा परिभाषित फलन $f$ के लिए 0.25 के परित: टेलर श्रेणी के पहले तीन पद ज्ञात कीजिए। 4

(ग) $\lim\limits_{x \to \infty} \left[ \sqrt{4x^2 + x - 1} - \sqrt{4x^2 - 7x + 3} \right]$ का मान ज्ञात कीजिए। 2

× × × × × × ×