No. of Printed Pages : 12

MTE–02

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME

(BDP)

Term-End Examination

December, 2024

MTE–02 : LINEAR ALGEBRA

Time : 2 Hours *Maximum Marks : 50*

Note : *(i) There are seven questions in this paper.*

*(ii) The **seventh** question is compulsory.*

*(iii) Do any **four** questions from question no. **1** to question no. **6**.*

(iv) Use of calculators is not allowed.

1. (a) Define a Hermitian matrix and give an example. 2

   (b) Check that the vectors (1, – 1, – 1), (1, 0, 1) and (1, 1, 3) are linearly independent. 3

(c) If the matrix of a linear transformation $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ with respect to the ordered basis $\{(1, 1), (0, 1)\}$ is : 3

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

find the linear transformation T.

(d) Find the minimal polynomial of the matrix : 2

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. (a) Check that the vector : 2

$$v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

is an eigen vector for the matrix :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Find the corresponding eigen value.

(b) Find the signatures of the forms $x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$ and $-x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + x_4^2$. Are these forms equivalent ? Justify your answer. 3

(c) Let : 3

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2a \\ 2b & c \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} a & 2 \\ 1 & c \end{bmatrix}$$

and

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Are there values a, b and c such that AB = C ? If yes, find the values. If no, justify your answer.

(d) Check whether $x^3 + 2x$ is in linear span of $\{x^3 + 2x^2 - 1, x^2 - x + 1\}$ in the vector space of polynomials with rational coefficient. 2

3. (a) Check whether or not the matrix : 6

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 1 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

is diagonalisable. If it is, find a matrix P and a diagonal matrix D such that $P^{-1} AP = D$. If A is not diagonalisable, find adjoint of A.

(b) Apply Gram-Schmidt orthgonalisation process to the ordered basis {(1, – 1, 0), (2, 0, 1), (– 1, 1, 1)} to obtain an orthonormal basis for $\mathbf{R}^3$. 4

4. (a) Check whether the following system of equations can be solved using Cramer's rule : 5

$$x + 2y + z = 4$$

$$2x + 5y + 3z = 10$$

$$-x + y + 2z = 2$$

If yes, solve the system of equations using Cramer's rule. If no, solve the system of equations using Gaussian Elimination.

(b) Find the basis dual to the basis {(1, – 1, 1), (1, 1, 1), (2, 1, 0)} of $\mathbf{R}^3$. 5

5. (a) Find the orthogonal canonical reduction of the form $x^2 + y^2 + z^2 + 8xy + 6xz$ and its principal axes. 7

(b) Find the vector equation of the plane determined by the points (1, 1, 1), (1, 1, – 1) and (1, 0, 1). Also check whether (1, 2, 2) lies on it. 3

6. (a) Show that the set S of all 2 × 2 lower triangular matrices with entries from **R** form a vector space over **R** under usual addition and scalar multiplication of matrices. Find a basis of this vector space. 8

(b) Check whether the map $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ defined by $T((x, y)) = (y, -x)$ is a linear operator. 2

7. Which of the following statements are true and which are false ? Justify your answer with a short proof or a counter-example, whichever is appropriate :

(a) Any subset of a set of linearly dependent vectors in a vector space is linearly dependent. 2

(b) An $n \times n$ matrix need not have n distinct eigen values. 2

(c) For a square matrix A, if $A^2 = I$, then $A = I$ or $A = -I$. 2

(d) Every unitary matrix is invertible. 2

(e) If all the eigen values of an $n \times n$ matrix are real, then the matrix is Hermitian. 2

MTE–02

स्नातक उपाधि कार्यक्रम

(बी. डी. पी.)

सत्रांत परीक्षा

दिसम्बर, 2024

एम.टी.ई.-02 : रैखिक बीजगणित

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

नोट : *(i) इस प्रश्न पत्र में सात प्रश्न हैं।*

(ii) ***सातवाँ*** *प्रश्न करना अनिवार्य है।*

(iii) प्रश्न संख्या ***1*** *से* ***6*** *तक से कोई* ***चार*** *प्रश्न हल कीजिए।*

(iv) कैल्कुलेटरों के प्रयोग करने का अनुमति नहीं है।

---

1. (क) एक हर्मिटि आव्यूह को परिभाषित कीजिए और एक उदाहरण दीजिए। 2

(ख) जाँच कीजिए कि सदिश $(1, -1, -1)$, $(1, 0, 1)$ और $(1, 1, 3)$ रैखिकतः स्वतंत्र हैं। 3

(ग) क्रमित आधार $\{(1, 1), (0, 1)\}$ के सापेक्ष यदि एक रैखिक रूपान्तरण $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ का आव्यूह : 3

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

है, तो रैखिक रूपान्तरण T ज्ञात कीजिए।

(घ) आव्यूह : 2

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

का अल्पिष्ट बहुपद निकालिए।

2. (क) जाँच कीजिए कि सदिश : 2

$$v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

आव्यूह

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

के लिये आइगेन सदिश है। संगत आइगेन मान ज्ञात कीजिए।

(ख) समघात $x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$

और $-x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + x_4^2$

के चिन्हक निकालिये। क्या ये समघात तुल्य हैं ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। 3

(ग) मान लीजिए कि : 3

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2a \\ 2b & c \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} a & 2 \\ 1 & c \end{bmatrix}$$

और

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

क्या a, b और c के ऐसे मान हैं जिसके लिये AB = C ? यदि हाँ, तो मान ज्ञात कीजिए। यदि नहीं, तो अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।

(घ) जाँच कीजिए कि $x^3 + 2x$ परिमेय संख्या गुणांक वाले बहुपदों की सदिश समष्टि में $\{x^3 + 2x^2 - 1, x^2 - x + 1\}$ की रैखिक विस्तृति में है। 2

3. (क) जाँच कीजिए कि आव्यूह : 6

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 1 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

विकर्णनीय है या नहीं। यदि विकर्णनीय है, तो एक आव्यूह P और एक विकर्ण आव्यूह D निकालिए जिसके लिए $P^{-1} AP = D$ । यदि A विकर्णनीय नहीं है, तो A की सखंडज निकालिए।

(ख) क्रमित आधार $\{(1, -1, 0), (2, 0, 0), (-1, 1, 1)\}$ पर ग्राम–श्मिट लाम्बिकीकरण प्रक्रिया का प्रयोग करके $\mathbf{R}^3$ के लिए एक लाम्बिक प्रासामान्य आधार ज्ञात कीजिए। 4

4. (क) जाँच कीजिए कि निम्नलिखित समीकरण निकाय क्रेमर नियम से हल किया जा सकता है या नहीं : 5

$$x + 2y + z = 4$$
$$2x + 5y + 3z = 10$$
$$-x + y + 2z = 2$$

यदि हाँ, तो समीकरण निकाय को क्रेमर नियम से हल कीजिए। यदि नहीं, तो समीकरण निकाय को गाउसीय निराकरण से हल कीजिए।

(ख) $\mathbf{R}^3$ के आधार $\{(1, -1, 1), (1, 1, 1), (2, 1, 0)\}$ का द्वैत आधार ज्ञात कीजिए। 5

5. (क) समघात $x^2 + y^2 + z^2 + 8xy + 6xz$ का लाम्बिक विहित समानयन और मुख्य अक्ष ज्ञात कीजिए। 7

(ख) बिन्दुओं $(1, 1, 1)$, $(1, 1, -1)$ और $(1, 0, 1)$ द्वारा निर्धारित समतल की सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए। यह भी जाँच कीजिए कि $(1, 2, 2)$ उस समतल पर स्थित है या नहीं। 3

6. (क) दिखाइए कि वास्तविक प्रविष्टियों वाले 2×2 निम्न त्रिभुजीय आव्यूहों के समुच्चय S, $\mathbf{R}$ पर एक सदिश समष्टि है। इस सदिश समष्टि का एक आधार निकालिए। 8

(ख) जाँच कीजिए कि मैप $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ जो $T((x, y)) = (y, -x)$ द्वारा परिभाषित है, एक रैखिक संकारक है या नहीं। 2

7. निम्नलिखित कथनों में से कौन-से कथन सत्य हैं और कौन-से असत्य हैं ? अपने उत्तर की पुष्टि एक लघु उपपत्ति या प्रत्युदाहरण द्वारा कीजिए, जो भी उचित है :

(क) एक सदिश समष्टि में रैखिकतः आश्रित सदिशों का उपसमुच्चय भी रैखिकतः आश्रित होता है। 2

(ख) एक $n \times n$ आव्यूह की n अलग-अलग आइगेन मान होने की आवश्यकता नहीं है। 2

(ग) यदि एक वर्ग आव्यूह A के लिये $A^2 = I$, तो $A = I$ या $A = -I$। 2

(घ) प्रत्येक ऐकिक आव्यूह व्युत्क्रमणीय होता है। 2

(ङ) यदि एक $n \times n$ आव्यूह के सभी आइगेन मान वास्तविक हैं, तो आव्यूह हर्मिटि है। 2

× × × × × × ×