No. of Printed Pages : 8

MTE–06

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)

Term-End Examination

December, 2024

MTE-06 : ABSTRACT ALGEBRA

Time : 2 Hours *Maximum Marks : 50*

Note : *(i) There are seven questions in this paper.*

*(ii) Question No. **7** is compulsory.*

*(iii) Do any **four** questions from Q. No. **1** to Q. No. **6**.*

(iv) Use of calculator is not allowed.

1. (i) Let $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ be defined by $f(x) = x^2 + 1$. Find $f^{-1}(\{-1,1\})$. 2

(ii) Give an example, with justification, of a group G and a subgroup H of G which is not normal in G. 2

(iii) Define the Euler ϕ-function. Find $\phi(9)$. 2

(iv) Define a Unique Factorisation Domain. Give an example of a Unique Factorisation Domain. 2

(v) Find the order of $\overline{4}$ in $\mathbf{Z}_{13}^*$. 2

2. (a) What is the possible number of Sylow 7-subgroups a group of order 56 can have ? Justify your answer. 3

(b) Define the operation * on **Z** by $a * b = a(b-3)$. Show that * is a binary operation. Is it associative ? Justify your answer. 2

(c) Check whether or not :

$$\mathbf{Z} + \sqrt{-3}\,\mathbf{Z} = \left\{a + b\left(\sqrt{-3}\right) \mid a, b \in \mathbf{Z}\right\}$$

is a ring under the usual addition and multiplication of complex numbers. 5

3. (a) Define the content of a polynomial in **Z** [x]. Find the content of the polynomials $2x^3 + 6x + 14$ and $2x^4 + 3x^2 + 5$. Which of these polynomials is primitive and which is not primitive ? Justify your answer. 3

(b) Let :

$$\mathrm{G} = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \middle| a, b, c \in \mathbf{R}, ac \neq 0\right\}.$$

Show that G is a group under matrix multiplication. Is G abelian ? Justify your answer. Also give an element of finite order $n, n > 1$, in G. 7

4. (a) Prove that any finite group is isomorphic to a subgroup of a permutation group. 5

(b) Define a Euclidean valuation. Also, give an example, with justification, of a Euclidean valuation. 3

(c) State the Eisenstein's criterion. Use it to show that $x^{11} - 7$ is irreducible in $\mathbf{Q}[x]$. 2

5. (a) Check whether or not $\phi : \mathbf{R}[x] \to \mathbf{R}$, defined by :

$$\phi\left(a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n\right) = a_0 + a_1 + ... + a_n$$

is a ring homomorphism. Also, check whether the kernel is a principal ideal or not. 6

(b) Apply the principle of induction to prove that $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ is divisible by 9 for all $n \in \mathbf{N}$. 4

6. (a) Prove that A_4 has no subgroup of order 6. 5

(b) Let R be a ring, I an ideal of R and J an ideal of I. Show that, if J has unity, then J is an ideal of R. Also, give an example, with justification, to show that if J does not satisfy this condition, it need not be an ideal of R. 5

7. Which of the following statements are true, and which are false ? Justify your answers with a short proof or a counter-example, whichever is appropriate : 10

   (i) A subring of a PID is a PID.

   (ii) If K is a normal subgroup of H and H is a normal subgroup of G, then K is a normal subgroup of G.

   (iii) A UFD has only finitely many maximal ideals.

   (iv) Every quotient ring has at least two elements.

   (v) Every commutative binary operation on a non-empty set must be associative.

MTE–06

स्नातक उपाधि कार्यक्रम (बी. डी. पी.)
सत्रांत परीक्षा

दिसम्बर, 2024
एम.टी.ई.-06 : अमूर्त बीजगणित

समय : 2 घण्टे अधिकतम अंक : 50

नोट : *(i) इस प्रश्न-पत्र में सात प्रश्न हैं।*

(ii) प्रश्न सं. 7 करना अनिवार्य है।

(iii) प्रश्न संख्या 1 से 6 तक किन्हीं ***चार*** *प्रश्नों के उत्तर दीजिए।*

(iv) कैल्कुलेटर का प्रयोग करने की अनुमति नहीं है।

1. (i) मान लीजिए $f:\mathbf{Z}\to\mathbf{Z}$ $f(x)=x^2+1$ द्वारा परिभाषित किया है। $f^{-1}(\{-1,1\})$ ज्ञात कीजिए। 2

(ii) पुष्टि के साथ एक समूह G और उसके उपसमूह H का उदाहरण दीजिए जहाँ H, G का प्रसामान्य उपसमूह नहीं है। 2

(iii) आयॅलर ϕ-फलन को परिभाषित कीजिए। $\phi(9)$ ज्ञात कीजिए। 2

(iv) अद्वितीय गुणनखंडन प्रांत को परिभाषित कीजिए। अद्वितीय गुणनखंडन प्रांत का उदाहरण दीजिए। 2

(v) $\mathbf{Z}_{13}^*$ में $\overline{4}$ की कोटि निकालिए। 2

2. (क) कोटि 56 वाले एक समूह में कितने सिलो–7 उपसमूह हो सकते हैं ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। 3

(ख) $\mathbf{Z}$ पर $a * b = a(b-3)$ द्वारा संक्रिया * को परिभाषित कीजिए। दिखाइए कि * एक द्वि–आधारी सक्रिया है। क्या * साहचर्य है ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। 2

(ग) जाँच कीजिए कि सम्मिश्र संख्याओं के साधारण जोड़ और गुणन के सापेक्ष $\mathbf{Z}+\sqrt{-3}\,\mathbf{Z} = \left\{a+b\left(\sqrt{-3}\right) \mid a,b \in \mathbf{Z}\right\}$ एक वलय है या नहीं। 5

3. (क) $\mathbf{Z}[x]$ में आविष्ट एक बहुपद का आधेय परिभाषित कीजिए। बहुपदों $2x^3+bx+14$ और $2x^4+3x^2+5$ के आधेय निकालिए। इनमें से कौन–सी पूर्वग है और कौन–सी पूर्वग नहीं है ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। 3

(ख) मान लीजिए :

$$\mathrm{G} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \middle| a,b,c \in \mathbf{R}, ac \neq 0 \right\}.$$

दिखाइए कि G आव्यूह गुणन के सापेक्ष एक समूह है। क्या G आबेली है ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। G में परिमित कोटि $n, n>1$, वाला एक अवयव भी दीजिए। 7

4. (क) सिद्ध कीजिए कि कोई भी परिमित समूह एक क्रमचय समूह के उपसमूह का तुल्यकारी है। 5

(ख) यूक्लिडीय मानांकन को परिभाषित कीजिए। पुष्टि के साथ एक यूक्लिडीय मानांकन का उदाहरण भी दीजिए। 3

(ग) आइजेन्स्टीइन का नियम बताइए। उसका प्रयोग करके दिखाइए कि $x^{11}-7$, $\mathbf{Q}[x]$ में अखण्डनीय है। 2

5. (क) जाँच कीजिए कि $\phi : \mathbf{R}[x] \to \mathbf{R}[x]$ जो

$$\phi\left(a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n\right) = a_0 + a_1 + ... + a_n$$

द्वारा परिभाषित है, एक वलय तुल्यकारिता है। यह भी जाँच कीजिए कि अष्टि एक मुख्य गुणजावली है या नहीं। 6

(ख) आगमन विधि से सिद्ध कीजिए कि सभी $n \in \mathbf{N}$ के लिए $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$, 9 से विभाजित होता है। 4

6. (क) सिद्ध कीजिए कि A_4 का कोटि 6 वाला कोई उपसमूह नहीं है। 5

(ख) मान लीजिए कि R एक वलय है और I, R में एक गुणजावली है और J, I में एक गुणजावली है। दिखाइए कि, यदि J में तत्समक अवयव है तो J, R की गुणजावली है। यह दिखाने के लिए कि, यदि यह प्रतिबंध संतुष्ट नहीं होता, तो J, R की गुणजावली नहीं है, पुष्टि के साथ एक उदाहरण दीजिए। 5

7. निम्नलिखित कथनों में से कौन-से कथन सत्य और कौन-से कथन असत्य हैं ? अपने उत्तर की पुष्टि लघु उपपत्ति या प्रत्युदाहरण द्वारा दीजिए जो भी उचित है : 10

(i) एक मुख्य गुणजावली प्रांत की उपवलय भी मुख्य गुणजावली प्रान्त है।

(ii) यदि K, H का प्रसामान्य उपसमूह है और H, G का प्रसामान्य उपसमूह है, तो K, G का प्रसामान्य उपसमूह है।

(iii) एक अद्वितीय गुणनखंडन प्रान्त में उच्छिष्ट गुणजावलियाँ परिमित संख्या में होती हैं।

(iv) प्रत्येक भागफल वलय में कम से कम दो अवयव होते हैं।

(v) एक अरिक्त समुच्चय पर प्रत्येक द्विआधारी संक्रिया साहचर्य होती है।

× × × × × × ×