No. of Printed Pages : 8

MTE–07

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME

(BDP)

Term-End Examination

December, 2024

MTE-07 : ADVANCED CALCULUS

Time : 2 Hours *Maximum Marks : 50*

Note : *(i) Question No.* ***1*** *is compulsory.*

(ii) Attempt any ***four*** *questions out of the remaining question nos.* ***2*** *to* ***7****.*

(iii) Use of calculator is not allowed.

---

1. State whether the following statements are true *or* false. Justify your answers : 5×2=10

   (a) $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ when $f(x)$ is positive in $]a-\delta, a+\delta[$ for some $\delta > 0$.

   (b) The function *f*, defined by :

   $$f(x,y) = \frac{x^3 + 3x^2y - 4y^3}{xy + 2}$$

   is homogeneous on its domain.

(c) $S = \left\{ 4 + \frac{1}{x} \mid 0 < x < 1 \right\}$ is bounded above.

(d) The Jacobian of the functions $u = x + y$ and $v = x - y$ is 2.

(e) The function f, defined by :

$$f(x, y) = x^4 + xy + y^2$$

is integrable on [1, 2] × [2, 3].

2. (a) Find f o g and g o f, if they exist, for the functions : 4

$$f(x, y) = \left(e^x, \ln\left(x^2 + y^2 + 1 \right) \right)$$

and $g(x, y) = (x + y, 5y)$

Also find their domains.

(b) Evaluate of the following limits : 2×3=6

(i) $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - \cos x - x}{x^2}$

(ii) $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{\sin 2x}$

3. (a) Find the second Taylor polynomial of the function $f(x, y) = e^{x+3y}$ at the point (0, 0). 4

(b) Show that : 4

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

(c) Let : 2

$$S = \left\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \le 16\right\}$$

and $C = \{(x, y, z) \mid -2 \le x \le z,$

$$-2 \le y \le z,\ -2 \le z \le z\}$$

Show that $S \supseteq C$.

4. (a) Let $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ be defined by :

$$f(x, y) = |x| + |y + 1|$$

Check whether f is continuous at the point (0, 0). Calculate the partial derivatives of f at the point (0, 0), if they exist. 6

(b) Evaluate the following repeated integral by reversing the order of integration : 4

$$\int_0^1 \left(\int_{x^2}^{x} xy\, dy \right) dx$$

5. (a) Find the local extrema of the function : 6

$$f(x, y) = 2x^2 - 2xy + y^2 + 2x - 2y + 1$$

(b) Find the product and quotient of functions fg and f/g, where

$$f(x,y) = e^{2x+3y},$$

and $$g(x,y) = \frac{\sin y}{x}, x \neq 0.$$

Also find their domains. 4

6. (a) Show that the following line integral :

$$\int_{(-1,2)}^{(3,1)} \left(y^2 + 2xy\right)dx + \left(x^2 + 2xy\right)dy$$

is independent of path and evaluate it. 5

(b) Integrate $f(x,y,z) = 2x + z - 3$ over the cylindrical region given by $x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 1$. 5

7. (a) Verify the chain rule for the Jacobians for the following functions : 6

$$u = e^{xy},\ v = e^{yz},\ w = e^{zx},$$

$$x = r,\ y = s^2,\ z = t^3.$$

(b) Show that :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

for the function $f(x,y) = \tan\left(xy^3\right)$. 4

MTE-07

स्नातक उपाधि कार्यक्रम (बी. डी. पी.)
सत्रांत परीक्षा

दिसम्बर, 2024
एम.टी.ई.-07 : उच्च कलन

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

नोट : *(i) प्रश्न सं. 1* ***अनिवार्य*** *है।*

(ii) प्रश्न सं. 2 से 7 तक किन्हीं ***चार*** *प्रश्नों के उत्तर दीजिए।*

(iii) कैल्कुलेटर का प्रयोग करने की अनुमति नहीं है।

---

1. बताइए कि निम्नलिखित कथन सत्य हैं **या** असत्य। अपने उत्तरों की पुष्टि कीजिए : 5×2=10

(क) $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ यदि एक $\delta > 0$ के लिए $]a - \delta, a + \delta[$ में $f(x)$ धनात्मक है।

(ख) $f(x, y) = \dfrac{x^3 + 3x^2y - 4y^3}{xy + 2}$ द्वारा दिया गया फलन f अपने प्रांत पर समघात है।

(ग) समुच्चय $S = \left\{ 4 + \frac{1}{x} \mid 0 < x < 1 \right\}$ निम्नत: परिबद्ध है।

(घ) फलन $u = x + y$ एवं $v = x - y$ का जैकोबियन 2 होता है।

(ङ) $f(x, y) = x^4 + xy + y^2$ द्वारा परिभाषित फलन $f, [1,2] \times [2,3]$ पर समाकलनीय है।

2. (क) निम्नलिखित फलनों के लिए $f \circ g$ और $g \circ f$ के अस्तित्व हैं, तो उनका पता लगाइए : 4

$$f(x, y) = \left(e^x, \ln\left(x^2 + y^2 + 1 \right) \right)$$

और $g(x, y) = (x + y, 5y)$

उनके प्रांत भी ज्ञात कीजिए।

(ख) निम्नलिखित सीमाओं का मूल्यांकन कीजिए : 6

(i) $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - \cos x - x}{x^2}$

(ii) $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{\sin 2x}$

3. (क) बिन्दु (0, 0) पर फलन $f(x, y) = e^{x+3y}$ का द्वितीय टेलर बहुपद ज्ञात कीजिए। 4

(ख) दिखाइए कि : 4

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

(ग) मान लीजिए : 2

$$S = \left\{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \le 16\right\}$$

और

$$C = \{(x,y,z) \mid -2 \le x \le z,$$
$$-2 \le y \le z,$$
$$-2 \le z \le z\}.$$

दिखाइए कि $S \supseteq C$।

4. (क) मान लीजिए $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$:

$$f(x,y) = |x| + |y+1|$$

द्वारा परिभाषित है। जाँच कीजिए कि f बिन्दु $(0,0)$ पर संतत है। बिन्दु (0, 0) पर f के आंशिक अवकलजों को परिकलित कीजिए, यदि अस्तित्व है। 6

(ख) निम्नलिखित समाकलन के क्रम में परिवर्तन करने के बाद, समाकलित कीजिए : 4

$$\int_0^1 \left(\int_{x^2}^{x} xy\, dy \right) dx$$

5. (क) फलन :

$$f(x,y) = 2x^2 - 2xy + y^2 + 2x - 2y + 1$$

के स्थानिकतः चरम मानों को ज्ञात कीजिए। 6

(ख) फलनयुग्मों fg एवं f/g के गुणनफल और भागफल ज्ञात कीजिए, जहाँ : 4

$$f(x,y) = e^{2x+3y},$$

एवं $$g(x,y) = \frac{\sin y}{x}, x \neq 0$$

उनके प्रांत भी बताइए

6. (क) दिखाइए कि निम्नलिखित रेखा समाकल पथ-स्वांतत्र्य है और इसका मूल्यांकन कीजिए : 5

$$\int_{(-1,2)}^{(3,1)} \left(y^2 + 2xy\right)dx + \left(x^2 + 2xy\right)dy$$

(ख) $x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 1$ द्वारा दिए गए बेलनी प्रदेश पर फलन $f(x,y,z) = 2x + z - 3$ का समाकलन कीजिए। 5

7. (क) निम्नलिखित फलनों के जैकोबियनों के लिए शृंखला नियम सत्यापित कीजिए : 6

$$u = e^{xy},\ v = e^{yz},\ w = e^{zx},$$

$$x = r,\ y = s^2,\ z = t^3.$$

(ख) फलन

$$f(x,y) = \tan\left(xy^3\right)$$

के लिए दिखाइए कि : 4

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

× × × × × × ×