No. of Printed Pages : 10

MTE–08

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)

Term-End Examination

December, 2024

(ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS)

MTE-08 : DIFFERENTIAL EQUATIONS

Time : 2 Hours *Maximum Marks : 50*

Note : (*i*) *Question No.* ***1*** *is compulsory.*

(*ii*) *Answer any* ***four*** *questions from Question Nos.* ***2*** *to* ***7****.*

(*iii*) *Use of calculator is not allowed.*

(*iv*) *Symbols have their usual meanings.*

1. State whether the following statements are True *or* False. Justify your answer with the remaining help of a short proof or a counter-example : 2×5=10

   (i) $y = a\cos\pi x + b\sin\pi x$ is a solution of the differential equation $y'' + \pi^2 y = 0$.

(ii) The differential equation :

$$yu_{xx} + 3yu_{xy} + 3u_x = 0, \quad y \neq 0$$

is parabolic.

(iii) The differential equation :

$$\left(2x\cos y + 3x^2 y\right)dx + \left(x^3 - x^2 \sin y - y\right)dy = 0$$

is not exact.

(iv) The partial differential equation :

$$yu_x + xu_y = xy\left(x^2 - y^2\right)$$

is a first order linear partial differential equation.

(v) If $y_1, y_2, ..., y_n$ are solutions of an nth order linear differential equation, then :

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + ... + c_n y_n$$

is also a solution.

2. (a) Solve the differential equation : 3

$$y \sin 2x\, dx - \left(y^2 + \cos^2 x\right)dy = 0$$

(b) Use the method of variation of parameters to find the general solution of the differential equation : 4

$$y'' - 3y' + 2y = \frac{e^x}{1 + e^x}$$

(c) Solve the differential equation : 3

$$y' + (x+1)y = e^{x^2} y^3$$

3. (a) Use the method of undetermined coefficients to find the general solution of the differential equation : 4

$$y'' + y' - 12y = 4e^{2x}$$

(b) Find an integrating factor and solve the differential equation : 3

$$(y^4 + 2y)dx + (xy^3 + 2y^4 - 4x)dy = 0$$

(c) Solve the differential equation : 3

$$x\frac{dy}{dx} = y - \sqrt{x^2 + y^2}$$

4. (a) Solve the differential equation : 3

$$y = 2px - xp^2$$

(b) Solve the differential equation : 4

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} - y = x^3$$

(c) Find the integral curves of the differential equations : 3

$$\frac{dx}{cy - bz} = \frac{dy}{az - cx} = \frac{dz}{bx - ay}$$

5. (a) Form a partial differential equation from $x^2 + y^2 = (z - c)^2 \tan^2 \alpha$. 3

(b) Find the complete integral of the partial differential equation : 4

$$y^2 zp - x^2 zq = x^2 y$$

(c) Solve the partial differential equation : 3

$$\left(D^2 + 3DD' + 2D'^2\right) z = x + y$$

6. (a) Find the complete integral of the differential equation : 3

$$p - q = x^2 + y^2$$

(b) Find the general solution of the differential equation : 4

$$y'' + y' - 2y = x + \sin x$$

(c) Find the orthogonal trajectories of the family of parabolas $y = cx^2$. 3

7. (a) Find the solution of the equation :

$$x\left(y^2 + u\right)u_x - y\left(x^2 + u\right)u_y = \left(x^2 - y^2\right)u$$

with $u = 1$ on $x + y = 0$. 4

(b) Find the solution of the one-dimensional wave equation :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$

satisfying the boundary conditions $z(0,t) = 0 = z(a,t)$, where a is constant. 6

MTE–08

स्नातक उपाधि कार्यक्रम (बी. डी. पी.)

सत्रांत परीक्षा

दिसम्बर, 2024

(ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित)

एम. टी. ई.-08 : अवकल समीकरण

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

नोट : *(i) प्रश्न सं. 1 अनिवार्य है।*

(ii) प्रश्न सं. 2 से 7 तक किन्हीं ***चार*** *प्रश्नों के उत्तर दीजिए।*

(iii) कैल्कुलेटर के प्रयोग की अनुमति नहीं है।

(v) प्रतीकों के अपने सामान्य अर्थ हैं।

---

1. बताइए कि निम्नलिखित कथन सत्य हैं **या** असत्य। संक्षिप्त उपपत्ति अथवा प्रतिउदाहरण की सहायता से अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए : $2\times5=10$

(क) अवकल समीकरण $y''+\pi^2 y=0$ का एक हल $y=a\cos\pi x+b\sin\pi x$ है।

(ख) अवकल समीकरण :

$$yu_{xx}+3yu_{xy}+3u_x=0, \quad y\neq 0$$

परवलयिक है।

(ग) अवकल समीकरण :

$$\left(2x\cos y + 3x^2 y\right)dx + \left(x^3 - x^2\sin y - y\right)dy = 0$$

यथातथ नहीं है।

(घ) आंशिक अवकल समीकरण :

$$yu_x + xu_y = xy\left(x^2 - y^2\right)$$

एक प्रथम कोटि रैखिक आंशिक अवकल समीकरण है।

(ङ) यदि $y_1, y_2, ..., y_n$ n वीं कोटि के रैखिक अवकल समीकरण के हल हैं, तो

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + ... + c_n y_n$$

भी एक हल है।

2. (क) अवकल समीकरण :

$$y\sin 2x\,dx - \left(y^2 + \cos^2 x\right)dy = 0$$

को हल कीजिए। 3

(ख) प्राचल विचरण विधि का प्रयोग करके अवकल समीकरण : 4

$$y'' - 3y' + 2y = \frac{e^x}{1+e^x}$$

का व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

(ग) अवकल समीकरण :

$$y' + (x+1)y = e^{x^2} y^3$$

को हल कीजिए। 3

3. (क) अनिर्धारित गुणांक विधि का प्रयोग करके अवकल समीकरण :

$$y'' + y' - 12y = 4e^{2x}$$

का व्यापक हल ज्ञात कीजिए। 4

(ख) अवकल समीकरण :

$$\left(y^4 + 2y\right)dx + \left(xy^3 + 2y^4 - 4x\right)dy = 0$$

के एक समाकलन गुणक ज्ञात कीजिए और हल कीजिए। 3

(ग) अवकल समीकरण :

$$x\frac{dy}{dx} = y - \sqrt{x^2 + y^2}$$

को हल कीजिए। 3

4. (क) अवकल समीकरण :

$$y = 2px - xp^2$$

को हल कीजिए। 3

(ख) अवकल समीकरण :

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} - y = x^3$$

को हल कीजिए। 4

(ग) अवकल समीकरणों :

$$\frac{dx}{cy-bz}=\frac{dy}{az-cx}=\frac{dz}{bx-ay}$$

के समाकल वक्र ज्ञात कीजिए। 3

5. (क) $x^2+y^2=(z-c)^2\tan^2\alpha$ से एक आंशिक अवकल समीकरण बनाइए। 3

(ख) आंशिक अवकल समीकरण :

$$y^2zp-x^2zq=x^2y$$

का संपूर्ण समाकल ज्ञात कीजिए। 4

(ग) आंशिक अवकल समीकरण :

$$\left(D^2+3DD'+2D'^2\right)z=x+y$$

को हल कीजिए। 3

6. (क) अवकल समीकरण :

$$p-q=x^2+y^2$$

का संपूर्ण समाकल ज्ञात कीजिए। 3

(ख) अवकल समीकरण :

$$y''+y'-2y=x+\sin x$$

का व्यापक हल ज्ञात कीजिए। 4

(ग) परवलय के परिवार $y = cx^2$ के लम्बकोणीय संछेदी (orthogonal trajectories) ज्ञात कीजिए। 3

7. (क) समीकरण :

$$x\left(y^2 + u\right)u_x - y\left(x^2 + u\right)u_y = \left(x^2 - y^2\right)u$$

जहाँ $x + y = 0$ पर $u = 1$ है, का हल ज्ञात कीजिए। 4

(ख) परिसीमा प्रतिबंधों $z(0,t) = 0 = z(a,t)$, जहाँ a एक अचर है, को संतुष्ट करने वाले एकविमीय तरंग समीकरण :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$

का हल ज्ञात कीजिए। 6

× × × × × × ×