No. of Printed Pages : 10

MTE–09

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)

Term-End Examination

December, 2024

(ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS)

MTE-09 : REAL ANALYSIS

Time : 2 Hours *Maximum Marks : 50*

Weightage : 70%

Note : *Attempt **five** questions in all. Q. No. **7** is compulsory. Answer any **four** questions from Question Nos. **1** to **6**. Use of calculators is not allowed.*

---

1. (a) Using principle of induction, prove that 7 is a factor of $2^{n+1} + 3^{2n-1}$, $\forall\, n \in \mathbf{N}$. 4

   (b) State inverse function theorem for continuous functions. Show that the function $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ defined by $f(x) = 4x - 5$ has an inverse, which is continuous. Also find its inverse. 3

   (c) Prove that the sequence (a_n), where : 3

$$a_n = \frac{3^2}{n^2 + 5^2},$$

   converges to zero.

2. (a) Show that the series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^4}{x^4 + n^4}, \forall x \in \mathbf{R}$, is uniformly convergent. 4

(b) Prove that a lower bound 'l' of a non-empty subset A of $\mathbf{R}$ is the infimum of A if and only if for every $\varepsilon > 0$, there exists an $a_\varepsilon \in A$ such that $a_\varepsilon < l + \varepsilon$. 4

(c) Show that the function $f : [-1,5] \to \mathbf{R}$ defined by $f(x) = \frac{5x-1}{x^2+6}$, is continuous. Is it uniformly continuous ? Justify your answer. 2

3. (a) If $\lim_{x \to 0} \frac{x(1 - b\cos x) + a \sin x}{x^3}$ exists for some values of a and b and it is equal to $\frac{1}{6}$, then find $a + b$. 4

(b) Test the following series for convergence : 4

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\sqrt{n^3 + 2} - \sqrt{n^3 - 2} \right]$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{1/n}$

(c) Check whether the set of all integers is closed or not. 2

4. (a) Evaluate : 4

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left[\frac{1}{\sqrt{(n+1)^3}}+\frac{1}{\sqrt{(n+2)^3}}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\sqrt{(n+3)^3}}.+.....+\frac{1}{\sqrt{(3n)^3}}\right]$$

(b) Check whether the set

$$[2,5[\cup[5,\ 7[\cup[7,10]$$

is compact or not. 2

(c) Prove or disprove : 2

"The series $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{e}{\pi}\right)^n$ is convergent."

(d) Find : 2

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3\sin x^3}{1-\cos x^3}$$

5. (a) Show that the function $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ defined by :

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{if } x\notin\mathbf{Q}\\ 3, & \text{if } x\in\mathbf{Q}\end{cases}$$

is not continuous at any $x\in\mathbf{R}$. 3

(b) Check whether the sequence (a_n), where $a_n = \frac{3n^3 + 2n^2}{4n^3 + 3n}$ is convergent. Is it Cauchy ? Justify. 2

(c) Let f and g be two real valued functions defined on $[a,b]$ such that g is Riemann integrable, f is differentiable and $f'(x) = g(x), \forall x \in [a,b]$. Show that : 5

$$\int_a^b g(x)dx = f(b) - f(a)$$

6. (a) Find Maclaurin's series expansion of sin x. 5

(b) Prove that between any two real roots of the equation, $3e^{3x}\cos 2x - 2 = 0$, there is at least one real root of the equation, $e^{3x}\sin 2x = 1$. 5

7. Which of the following statements are *true* and which are *false* ? Give proper reasons for your answers : 5×2=10

(i) The function f defined by :

$$f(x) = |x - 2| + |5 - x|$$

is differentiable at $x = 1$.

(ii) The sequence $\langle 3n+1 \rangle$ is a monotonically increasing sub-sequence of the sequence $\left(3n+(-1)^{n-1}\right)$.

(iii) Complement of the interval [2, 3] is closed.

(iv) The function *f*, defined on **R** by $f(x)=|x+4|$ has a local minimum at $x=-4$.

(v) The function *f*, where $f(x)=[x]$, is integrable on $[0,3]$.

MTE–09

स्नातक उपाधि कार्यक्रम (बी. डी. पी.)

सत्रांत परीक्षा

दिसम्बर, 2024

(ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित)

एम.टी.ई.-09 : वास्तविक विश्लेषण

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

भारिता : 70%

नोट : *कुल* ***पाँच*** *प्रश्न हल कीजिए। प्र. सं.* ***7 अनिवार्य*** *है। प्र. सं.* ***1*** *से* ***6*** *तक किन्हीं* ***चार*** *प्रश्नों के उत्तर दीजिए। कैल्कुलेटरों के प्रयोग की अनुमति नहीं है।*

---

1. (क) आगमन के नियम से सिद्ध कीजिए कि 7, सभी $n \in \mathbf{N}$ के लिए $2^{n+1} + 3^{2n-1}$ का एक भाजक है। 4

   (ख) संतत फलनों के लिए व्युत्क्रम फलन प्रमेय का कथन दीजिए। दिखाइए कि फलन $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ जो $f(x) = 4x - 5$ द्वारा परिभाषित है, का व्युत्क्रम है और संतत है। साथ ही इसका व्युत्क्रम भी ज्ञात कीजिए। 3

(ग) सिद्ध कीजिए कि अनुक्रम (a_n), शून्य को अभिसरित होता है, जहाँ $a_n = \frac{3^2}{n^2+5^2}$ है। 3

2. (क) दिखाइए कि श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^4}{x^4+n^4}, \forall x \in \mathbf{R}$, एकसमानतः अभिसारी है। 4

(ख) सिद्ध कीजिए कि $\mathbf{R}$ के एक अरिक्त समुच्चय A का एक निम्न परिबंध 'l', A का निम्निष्ठ है यदि और केवल यदि प्रत्येक $\varepsilon > 0$ के लिए एक $a_\varepsilon \in A$ इस प्रकार है कि $a_\varepsilon < l + \varepsilon$ हो। 4

(ग) दिखाइए कि $f(x) = \frac{5x-1}{x^2+6}$ द्वारा परिभाषित फलन $f : [-1,5] \to \mathbf{R}$ संतत है। क्या यह एकसमानतः संतत है ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। 2

3. (क) यदि a और b के किन्हीं मानों के लिए

$$\lim_{x \to 0} \frac{x(1-b\cos x)+a\sin x}{x^3}$$

का अस्तित्व है और यह $\frac{1}{6}$ के बराबर है, तो $a+b$ का मान ज्ञात कीजिए। 4

(ख) निम्नलिखित श्रेणियों के अभिसरण की जाँच कीजिए : 4

(i) $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\sqrt{n^3+2}-\sqrt{n^3-2}\right]$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{1/n}$

(ग) जाँच कीजिए कि सभी पूर्णांकों का समुच्चय संवृत है या नहीं। 2

4. (क) मान ज्ञात कीजिए : 4

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left[\frac{1}{\sqrt{(n+1)^3}}+\frac{1}{\sqrt{(n+2)^3}}+\frac{1}{\sqrt{(n+3)^3}}+\ldots\ldots+\frac{1}{\sqrt{(3n)^3}}\right]$$

(ख) जाँच कीजिए कि समुच्चय

$$[2,5[\cup[5,\ 7[\cup[7,10]$$

संहत है या नहीं। 2

(ग) सिद्ध या असिद्ध कीजिए : 2

"श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{e}{\pi}\right)^n$ अभिसारी है।"

(घ) ज्ञात कीजिए : 2

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^3 \sin x^3}{1 - \cos x^3}$$

5. (क) दिखाइए कि :

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{यदि } x \notin \mathbf{Q} \\ 3, & \text{यदि } x \in \mathbf{Q} \end{cases}$$

द्वारा परिभाषित फलन $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, x \in \mathbf{R}$ के किसी भी बिन्दु पर संतत नहीं है। 3

(ख) जाँच कीजिए कि अनुक्रम (a_n), जहाँ $a_n = \frac{3n^3 + 2n^2}{4n^3 + 3n}$, अभिसारी है या नहीं। क्या यह कॉशी है ? पुष्टि कीजिए। 2

(ग) मान लीजिए f और g, $[a,b]$ पर परिभाषित दो ऐसे फलन हैं कि g रीमान समाकलनीय है, f अवकलनीय है और $f'(x) = g(x), \forall\, x \in [a,b]$ है। दिखाइए कि : 5

$$\int_a^b g(x)\,dx = f(b) - f(a)$$

6. (क) $\sin x$ का मैक्लॉरिन श्रेणी प्रसार ज्ञात कीजिए। 5

(ख) सिद्ध कीजिए कि समीकरण $3e^{3x}\cos 2x - 2 = 0$ के किन्हीं भी दो वास्तविक मूलों के बीच में समीकरण $e^{3x}\sin 2x = 1$ का कम-से-कम एक वास्तविक मूल तो अवश्य है। 5

7. निम्नलिखित कथनों में से कौन-से कथन **सत्य** हैं और कौन-से **असत्य** हैं ? अपने उत्तरों के उचित कारण दीजिए : $5\times2=10$

(i) $f(x) = |x-2| + |5-x|$ द्वारा परिभाषित फलन $f, x = 1$ पर अवकलनीय है।

(ii) अनुक्रम $(3n+1)$ अनुक्रम $\left(3n + (-1)^{n-1}\right)$ का एक एकदिष्टतः वर्धमान उप-अनुक्रम है।

(iii) अंतराल $[2,3]$ का पूरक, संवृत है।

(iv) $\mathbf{R}$ पर $f(x) = |x+4|$ द्वारा परिभाषित फलन f का $x = -4$ पर एक स्थानीय न्यूनतम है।

(v) फलन f, जहाँ $f(x) = [x]$ है, $[0,3]$ पर समाकलनीय है।

× × × × × × ×