No. of Printed Pages : 10

# MTE–10

## BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)

## Term-End Examination

## December, 2024

### (ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS)

### MTE–10 : NUMERICAL ANALYSIS

*Time : 2 Hours* *Maximum Marks : 50*

*Weightage : 70%*

---

***Note :*** *Attempt any **five** questions. All computations may be done upto 3 decimal places. Use of calculators is not allowed. Symbols have their usual meanings.*

---

1. (a) Find the spectral radius of the iteration matrix when the Jacobi method is applied to solve the system of equations : 5

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Do the iterations converge to the exact solution ? Justify.

(b) Find the Newton's divided difference interpolating polynomial for the following data : 5

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 1 | $-2$ |
| 3 | 1 |
| 5 | 2 |
| 8 | 5 |

2. (a) Without computing the eigen values, prove that the eigen values of the matrix : 4

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

satisfy the inequality $-1 \le \lambda \le 8$.

(b) Find the value of $f(2)$ and $f'(2)$ for the polynomial $f(x) = x^4 - x^3 + 2x^2 - 4x$ using Horner's method. 3

(c) Show that the Newton-Raphson iteration scheme for computing $a^{\frac{1}{k}}$ is : 3

$$x_{n+1} = \frac{1}{k}\left[(k-1)x_n + \frac{a}{x_n^{k-1}}\right],$$

where $a > 0$.

3. (a) If $f_i$ is the value of $f(x)$ at $x = x_i = x_0 + ih$, $i = 1, 2, 3, ....,$ then prove that : 6

$$f_i = \mathrm{E}^i f_0 = \sum_{j=0}^{i} \mathrm{C}(i, j) \Delta^j f_0$$

(b) Find the unit interval containing the smallest positive root of the equation $x^3 + x - 5 = 0$. Perform three iterations of the Bisection method to locate the root. 4

4. (a) Using the LU decomposition method, solve the following system of linear equations : 6

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 7 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(b) Use Lagrange's interpolation formula to estimate the value of $f(3)$ from the following data : 4

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 2 | 3 |
| 5 | 1 |
| 6 | 2 |
| 7 | 6 |

5. (a) Determine the constants $\alpha, \beta$ and $\gamma$ in the differentiation formula : 5

$$y''(x_0) = \alpha y(x_0 - h) + \beta y(x_0) + \gamma y(x_0 + h)$$

so that the method is of highest possible order.

(b) Find $y(1.2)$ as a solution of $y' = x^2 + y^2$, $y(1) = 2$, $h = 0.1$ using Heun's method. 5

6. (a) Use composite trapezoidal rule to find : 5

$$\int_1^2 \frac{dx}{x+1}$$

with $h = 0.5$ and $h = 0.25$. Improve the accuracy by Romberg integration.

(b) Find the inverse of the matrix : 5

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

using Gauss-Jordan method.

7. (a) Use Newton-Raphson method to compute the square root of 81, starting with an initial approximation as $x_0 = 10$. Perform two iterations only. 3

(b) Let :

$$\omega(x) = \prod_{k=0}^{n} (x - x_k).$$

Show that the interpolating polynomial of degree $\leq n$ with the nodes $x_0, x_1, ..., x_n$ can be written as : 5

$$P_n(x) = \omega(x) \sum_{k=0}^{n} \frac{f(x_k)}{(x - x_k)\omega'(x_k)}$$

(c) Prove that : 2

$$\mu = \sqrt{1 + \frac{\delta^2}{4}}$$

# MTE–10

## स्नातक उपाधि कार्यक्रम

## ( बी. डी. पी. )

## सत्रांत परीक्षा

## दिसम्बर, 2024

## ( ऐच्छिक पाठ्क्रम : गणित )

## एम.टी.ई.–10 : संख्यात्मक विश्लेषण

*समय : 2 घण्टे* *अधिकतम अंक : 50*

*भारिता : 70%*

***नोट :*** *किन्हीं **पाँच** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। सभी अभिकलन तीन दशमलव स्थानों तक निकटित कर सकते हैं। कैल्कुलेटरों के प्रयोग की अनुमति नहीं है। प्रतीकों के अपने सामान्य अर्थ हैं।*

1. (अ) समीकरण निकाय : 5

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

को जब जैकोबी विधि से हल किया जाता है, तो पुनरावृत्ति आव्यूह की स्पेक्ट्रमी त्रिज्या ज्ञात कीजिए। क्या पुनरावृत्तियाँ यथातथ हल को अभिसारित होती हैं ? पुष्टि कीजिए।

(ब) निम्नलिखित आँकड़ों के लिए न्यूटन का विभाजित अंतर अंतर्वेशी बहुपद ज्ञात कीजिए : 5

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 1 | $-2$ |
| 3 | 1 |
| 5 | 2 |
| 8 | 5 |

2. (अ) आइगेन मानों का अभिकलन किए बिना सिद्ध कीजिए कि आव्यूह : 4

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

के आइगेन मान असमिका $-1 \le \lambda \le 8$ को संतुष्ट करते हैं।

(ब) हॉर्नर विधि से बहुपद $f(x) = x^4 - x^3 + 2x^2 - 4x$ के लिए $f(2)$ और $f'(2)$ मान ज्ञात कीजिए। 3

(स) दिखाइए कि $a^{\frac{1}{k}}$ के परिकलन के लिए न्यूटन–रैफ्सन पुनरावृत्ति विधि : 3

$$x_{n+1} = \frac{1}{k}\left[(k-1)x_n + \frac{a}{x_n^{k-1}}\right],$$

है, जहाँ $a > 0$ है।

3. (अ) यदि $i = 1, 2, 3, ....,$ के लिए $x = x_i = x_0 + ih$ पर $f(x)$ का मान $f_i$ है, तो सिद्ध कीजिए कि : 6

$$f_i = \mathrm{E}^i f_0 = \sum_{j=0}^{i} \mathrm{C}(i, j) \Delta^j f_0$$

(ब) वह इकाई अंतराल ज्ञात कीजिए जिसमें समीकरण $x^3 + x - 5 = 0$ का न्यूनतम धन मूल है। समद्विभाजन विधि की तीन पुनरावृत्तियों से उस मूल का आकलन कीजिए। 4

4. (अ) LU वियोजन विधि से, निम्नलिखित रैखिक समीकरण निकाय को हल कीजिए : 6

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 7 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(ब) निम्नलिखित आँकड़ों पर लैग्रांज के अंतर्वेशी बहुपद सूत्र लगाकर $f(3)$ का मान आकलित कीजिए : 4

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 2 | 3 |
| 5 | 1 |
| 6 | 2 |
| 7 | 6 |

5. (अ) अवकलन सूत्र : 5

$$y''(x_0) = \alpha y(x_0 - h) + \beta y(x_0) + \gamma y(x_0 + h)$$

में अचरों $\alpha, \beta$ एवं $\gamma$ का मान इस प्रकार ज्ञात कीजिए कि यह विधि अधिकतम सम्भव कोटि की बन जाए।

(ब) ह्यूएन विधि द्वारा : 5

$$y' = x^2 + y^2, \quad y(1) = 2, \quad h = 0.1$$

के लिए एक हल $y(1.2)$ ज्ञात कीजिए।

6. (अ) $h = 0.5$ और $h = 0.25$ लेकर, संयुक्त समलम्बी नियम से : 5

$$\int_1^2 \frac{dx}{x+1}$$

ज्ञात कीजिए। रॉम्बर्ग समाकलन द्वारा शुद्धता में सुधार कीजिए।

(ब) गाउस-जॉर्डन विधि से आव्यूह : 5

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

का व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए।

7. (अ) प्रारम्भिक सन्निकटन $x_0 = 10$ लेकन न्यूटन–रैफ्सन विधि से 81 का वर्गमूल ज्ञात कीजिए। केवल दो पुनरावृत्तियाँ दीजिए। 3

(ब) मान लीजिए $\omega(x) = \prod_{k=0}^{n} (x - x_k)$ है। दिखाइए कि बिंदुओं $x_1, x_2, ...., x_n$ पर घात अधिकतम $n$ वाले अंतर्वेशी बहुपद को निम्न प्रकार लिखा जा सकता है : 5

$$P_n(x) = \omega(x) \sum_{k=0}^{n} \frac{f(x_k)}{(x - x_k)\omega'(x_k)}$$

(स) सिद्ध कीजिए कि : 2

$$\mu = \sqrt{1 + \frac{\delta^2}{4}}$$

× × × × × × ×