No. of Printed Pages : 8

MTE–13

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)

Term-End Examination

December, 2024

(ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS)

MTE-13 : DISCRETE MATHEMATICS

Time : 2 Hours *Maximum Marks : 50*

Weightage : 70%

Note : *Question No.* ***1*** *is compulsory. Answer any* ***four*** *questions from Q. Nos.* ***2*** *to* ***7****. Use of calculator is not allowed.*

1. Which of the following statements are True and which are False ? Justify your answers : 5×2=10

   (i) There is a 3-regular graph on 125 vertices.

   (ii) The generating function for the sequence (1, 2, 3, ...) is $(1 - z)^{-2}$.

   (iii) $a_{n+2} + \sqrt{a_{n+1}} + a_n^2 = 0$ is a homogeneous linear recurrence relation.

   (iv) The partition 4 + 3 + 3 + 1 is self-conjugate.

(v) For any ***two*** logical statements p and q $(p \vee q) \wedge \sim q$ is always false.

2. (a) Using mathematical induction, prove that : 4

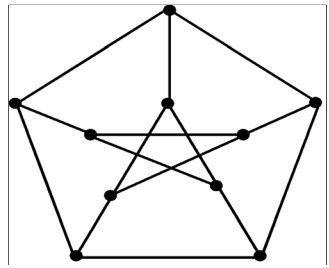
$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+.....+\frac{1}{n^2} \leq 2-\frac{1}{n}, \ \forall n \in \mathbf{N}$$

(b) Find the number of integer solutions of the equation : 6

$$x + y + z = 20$$

with $0 < x \leq 7$, $0 < y \leq 8$ and $0 < z$.

3. (a) Check whether the following graph is planar or not : 5



(b) If a five-digit number is chosen at random, what is the probability that the product of the digits in it is 45 ? 5

4. (a) Construct the truth table of : 4

$$(p \wedge q) \vee (\sim q \rightarrow r)$$

(b) How many permutations are there of the letters of the word ALPHABET ? 2

(c) Set up a recurrence relation to express the number of derangements of {1, 2, 3, ..., n}. 4

5. (a) Give a direct proof of the statement : 2

"If m and n are odd integers, then m . n is also odd."

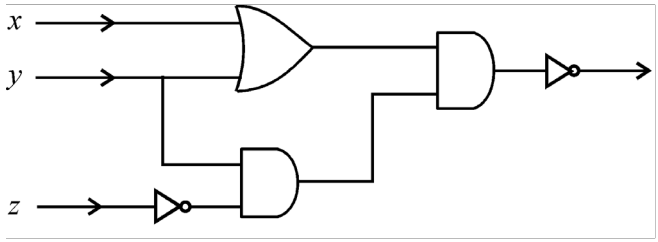
(b) Solve the recurrence relation : 5

$$a_n - 5a_{n-1} = 0,$$

$$n \geq 1 \text{ and } a_0 = 3,$$

using generating functions.

(c) Write the Boolean expression for the following logic circuit : 3



6. (a) 24 apples are to be distributed amongst 4 girls and each girl must got at least one apple. In how many ways can this be done ? 4

(b) Find the sum of the following series : 6

$$1-\frac{2^2}{1!}+\frac{3^2}{2!}-\frac{4^2}{3!}+\ldots\ldots+(-1)^{n-1}\frac{n^2}{(n-1)!}.$$

7. (a) Prove that every tree is bipartite. Is its converse also true ? Justify. 4

(b) Solve the following recurrence relation : 6

$$b_{n+2}-8b_{n+1}+16b_n=4^n, \qquad n\geq 0$$

MTE–13

स्नातक उपाधि कार्यक्रम (बी.डी.पी.)

सत्रांत परीक्षा

दिसम्बर, 2024

(ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित)

एम.टी.ई.-13 : विविक्त गणित

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

भारिता : 70%

नोट : *प्रश्न सं. 1 अनिवार्य है। प्रश्न सं. 2 से 7 तक किन्हीं* ***चार*** *प्रश्नों के उत्तर दीजिए। कैल्कुलेटरों की अनुमति नहीं है।*

---

1. निम्नलिखित में से कौन-से कथन सत्य और कौन-से असत्य हैं ? अपने उत्तरों की पुष्टि कीजिए : $5\times2=10$

   (i) 125 शीर्षों पर एक 3-नियमित ग्राफ होता है।

   (ii) अनुक्रम (1, 2, 3, ...) के लिए जनक फलन $(1-z)^{-2}$ है।

   (iii) $a_{n+2}+\sqrt{a_{n+1}}+a_n^2=0$ एक रैखिक समघात पुनरावृत्ति संबंध है।

   (iv) विभाजन $4+3+3+1$ स्वसंयुग्मी है।

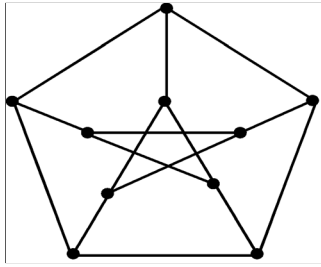
(v) किन्हीं भी दो तार्किक कथनों p और q के लिए $(p \vee q) \wedge \sim q$ हमेशा असत्य है।

2. (क) गणितीय आगमन के सिद्धान्त का प्रयोग करके सिद्ध कीजिए : 4

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{1}{n^2} \leq 2-\frac{1}{n}, \quad \forall n \in \mathbf{N}$$

(ख) समीकरण $x+y+z=20$ के पूर्णांक हलों की संख्या ज्ञात कीजिए, जहाँ $0<x \leq 7, 0<y \leq 8$ और $0<z$ है। 6

3. (क) जाँच कीजिए कि निम्नलिखित ग्राफ समतलीय है या नहीं : 5



(ख) यदि एक 5-अंकीय संख्या यादृच्छया चुनी जाती है, तो क्या प्रायिकता है कि इसके अंकों का गुणनफल 45 है ? 5

4. (क) $(p \wedge q) \vee (\sim q \rightarrow r)$ की सत्य सारणी बनाइए। 4

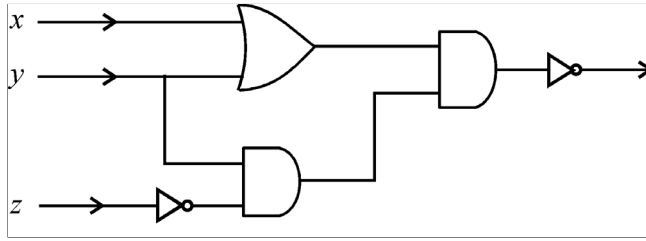
(ख) ALPHABET शब्द के अक्षरों के कितने क्रमचय हैं ? 2

(ग) $\{1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots\ldots, n\}$ के अपविन्यासों की संख्या को व्यक्त करने के लिए एक पुनरावृत्ति संबंध बनाइए। 4

5. (क) कथन "यदि m और n विषम पूर्णांक हैं, तो $m \cdot n$ भी विषम पूर्णांक होगा।" की एक प्रत्यक्ष उपपत्ति दीजिए। 2

(ख) जनक फलनों के प्रयोग से पुनरावृत्ति संबंध $a_n - 5a_{n-1} = 0, n \geq 1$, जहाँ $a_0 = 3$, को हल कीजिए। 5

(ग) नीचे दिए गए तर्क परिपथ के लिए बूलीय व्यंजक लिखिए : 3



6. (क) 24 सेबों को 4 बच्चियों में इस प्रकार बाँटना है कि प्रत्येक बच्ची को कम से कम एक सेब तो मिले। कितने तरीकों से यह काम किया जा सकता है ? 4

(ख) निम्नलिखित श्रेणी का योगफल ज्ञात कीजिए : 6

$$1-\frac{2^2}{1!}+\frac{3^2}{2!}-\frac{4^2}{3!}+\ldots\ldots\ldots+(-1)^{n-1}\frac{n^2}{(n-1)!}$$

7. (क) सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक वृक्ष एक द्विभाजित ग्राफ होता है। क्या इसका विलोम भी सत्य है ? पुष्टि कीजिए। 4

(ख) निम्नलिखित पुनरावृत्ति संबंध को हल कीजिए : 6

$$b_{n+2}-8b_{n+1}+16b_n=4^n, \quad n\geq 0$$

× × × × × × ×