No. of Printed Pages : 9

PHE–14

BACHELOR OF SCIENCE (B. Sc.)

Term-End Examination

December, 2024

PHE-14 : MATHEMATICAL METHODS IN PHYSICS—III

Time : 2 Hours *Maximum Marks : 50*

Note **:** (*i*) *Attempt all questions.*

(*ii*) *The marks for each question are indicated against it.*

(*iii*) *Symbols have their usual meanings.*

---

1. Attempt any *five* parts : 5×2=10

   (a) What are symmetric and antisymmetric tensors ?

   (b) Show that the matrix $A = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$ is both Hermitian and unitary.

   (c) Show that each element in an abelian group is a class by itself.

(d) Locate and name the singularity in the finite z-plane :

$$\frac{\ln(z+2i)}{z^2}$$

(e) Obtain the Fourier transform of the function :

$$f(x)=\begin{cases} x, & 0<x<1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

(f) Obtain the Laplace transform of $7 + 2e^{3t}$.

(g) Using Rodrigues' formula for the Hermite polynomials :

$$\mathrm{H}_n(x)=(-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right),$$

evaluate $\mathrm{H}_3(x)$.

(h) Calculate the residue of $f(z)=\frac{1}{z^2-1}$ at the singular points.

2. Attempt any *two* parts : 2×5=10

(a) Verify the Cayley-Hamilton theorem for the matrix :

$$\frac{\hbar}{2}\begin{bmatrix} \sin\theta & \cos\theta e^{-i\phi} \\ \cos\theta e^{i\phi} & -\sin\theta \end{bmatrix}$$

(b) Show that every eigen value of a unitary matrix is a complex number of unit modulus.

(c) Define a Group. Show that set $\{1, \omega, \omega^2\}$ forms a cyclic group of order 3 under multiplication, where ω is the imaginary cube root of unity.

3. Attempt any *two* parts : 2×5=10

(a) Obtain the Taylor series expansion of $\cos^2 z$ about $z = 0$.

(b) Show that :

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5 - 4\cos\theta} = \frac{2\pi}{3}$$

(c) Obtain the analytic function whose real part is :

$$u(x, y) = e^x \cos y$$

4. Attempt any *two* parts : 2×5=10

(a) Obtain the inverse Laplace transform of the function :

$$F(s) = \frac{s}{(s-1)^2 - 4}$$

(b) Using Laplace transform, solve the initial value problem :

$$y'' + 2y' - 8y = 0$$

$$y(0) = 1,\ y'(0) = 8$$

(c) Obtain Fourier's transform of the function :

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 < x < \pi \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

5. Attempt any *one* part : 10×1=10

(a) Using the generating relation for Legendre polynomials :

$$g(x,t) = \frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{P}_n(x) t^n$$

obtain the recurrence relation :

$$(2n+1)x\,\mathrm{P}_n(x) = (n+1)\mathrm{P}_{n+1}(x) + n\mathrm{P}_{n-1}(x)$$

Also, obtain the value of $\mathrm{P}_2(x)$. 8+2

(b) Using the generating function for the Bessel's function :

$$g(x,t) = \exp\left[\frac{x}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)\right] = \sum_{-\infty}^{\infty} \mathrm{J}_n(x) t^n$$

prove that :

$$\mathrm{J}_{n-1}(x) + \mathrm{J}_{n+1}(x) = 2\frac{n}{x}\mathrm{J}_n(x)$$

Also, show that for $t = 1$, the generating function for Bessel's function is : 7+3

$$\mathrm{J}_0(x) + 2\mathrm{J}_2(x) + 2\mathrm{J}_4(x) + \ldots\ldots\ldots\ldots = 1$$

PHE–14

विज्ञान स्नातक (बी. एस.-सी.)

सत्रांत परीक्षा

दिसम्बर, 2024

पी.एच.ई.-14 : भौतिकी में गणितीय विधियाँ—III

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

नोट : (*i*) सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।

(*ii*) प्रत्येक प्रश्न के अंक उसके सामने दिए गए हैं।

(*iii*) प्रतीकों के अपने सामान्य अर्थ हैं।

---

1. कोई ***पाँच*** भाग कीजिए : $5 \times 2 = 10$

(क) सममित और प्रतिसममित टेन्सर की परिभाषा लिखिए।

(ख) सिद्ध कीजिए कि आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$ हर्मिटी और ऐकिक है।

(ग) सिद्ध कीजिए कि एक आबेली समूह का प्रत्येक अवयव स्वयं में एक वर्ग है।

(घ) निम्नलिखित फलन की विचित्रताओं का परिमित z–समतल में स्थान निर्धारण कीजिए और नाम बताइए :

$$\frac{\ln(z+2i)}{z^2}$$

(ङ) निम्नलिखित फलन का फूरिये रूपांतर निकालिए :

$$f(x)=\begin{cases} x, & 0<x<1 \\ 0, & \text{अन्यथा} \end{cases}$$

(च) $7+2e^{3t}$ का लाप्लास रूपांतर प्राप्त कीजिए।

(छ) हर्मिट बहुपदों के रोड्रिगेज़ सूत्र :

$$\mathrm{H}_n(x)=(-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right)$$

का उपयोग कर $\mathrm{H}_3(x)$ का मान ज्ञात कीजिए।

(ज) विचित्र बिन्दुओं पर फलन $f(z)=\dfrac{1}{z^2-1}$ के अवशिष्ट परिकलित कीजिए।

2. कोई **दो** भाग कीजिए : 2×5=10

(क) निम्नलिखित आव्यूह के लिए कैले-हैमिल्टन प्रमेय को सत्यापित कीजिए :

$$\frac{\hbar}{2}\begin{bmatrix} \sin\theta & \cos\theta\, e^{-i\phi} \\ \cos\theta\, e^{i\phi} & -\sin\theta \end{bmatrix}$$

(ख) सिद्ध कीजिए कि ऐकिक आव्यूह का प्रत्येक आइगेन मान एकक मापांक की सम्मिश्र संख्या होती है।

(ग) समूह की परिभाषा बताइए। सिद्ध कीजिए कि समुच्चय $\{1, \omega, \omega^2\}$ गुणन के अधीन कोटि–3 वाला एक चक्रीय समूह है, जहाँ $\omega, 1$ का अधिकल्पित घनमूल है।

3. कोई **दो** भाग कीजिए : 2×5=10

(क) फलन $\cos^2 z$ का $z = 0$ के प्रति टेलर श्रेणी प्रसार प्राप्त कीजिए।

(ख) सिद्ध कीजिए कि :

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5 - 4\cos\theta} = \frac{2\pi}{3}$$

(ग) एक विश्लेषिक फलन प्राप्त कीजिए जिसका वास्तविक भाग $u(x, y) = e^x \cos y$ है।

4. कोई **दो** भाग कीजिए : 2×5=10

(क) फलन $F(s)=\frac{s}{(s-1)^2-4}$ का व्युत्क्रम लाप्लास रूपांतर प्राप्त कीजिए।

(ख) लाप्लास रूपांतरण विधि का प्रयोग करते हुए निम्नलिखित आदि मान समस्या का हल प्राप्त कीजिए :

$$y''+2y'-8y=0$$
$$y(0)=1,\ y'(0)=8$$

(ग) निम्नलिखित फलन का फूरिये रूपांतर प्राप्त कीजिए :

$$f(x)=\begin{cases}\sin x, & 0<x<\pi\\ 0, & \text{अन्यथा}\end{cases}$$

5. कोई **एक** भाग कीजिए : 10×1=10

(क) लेजैन्ड्रे बहुपदों के जनक फलन :

$$g(x,t)=\frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)t^n$$

का उपयोग कर पुनरावृत्ति संबंध :

$$(2n+1)xP_n(x)=(n+1)P_{n+1}(x)+nP_{n-1}(x)$$

प्राप्त कीजिए। $P_2(x)$ का मान भी प्राप्त कीजिए।

8+2

(ख) बेसल फलन के जनक फलन :

$$g(x,t) = \exp\left[\frac{x}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)\right] = \sum_{-\infty}^{\infty} \mathrm{J}_n(x) t^n$$

का उपयोग कर, सिद्ध कीजिए कि :

$$\mathrm{J}_{n-1}(x) + \mathrm{J}_{n+1}(x) = 2\frac{n}{x}\mathrm{J}_n(x)$$

यह भी सिद्ध कीजिए कि $t = 1$ के लिए, बेसल फलन का जनक फलन निम्नलिखित है : 7+3

$$\mathrm{J}_0(x) + 2\mathrm{J}_2(x) + 2\mathrm{J}_4(x) + \ldots\ldots\ldots = 1$$

× × × × × × ×