

No. of Printed Pages : 12

BMTC–132

**BACHELOR OF SCIENCE
(GENERAL)/BACHELOR OF ARTS
(GENERAL)/BACHELOR OF SCIENCE
(MULTIDISCIPLINARY)/ BACHELOR OF
ARTS
(MULTIDISCIPLINARY)/BACHELOR OF
SCIENCE (MATHEMATICS)
(BSCG/BAG/BSCM/BAM/BSCFMT)**

Term-End Examination

December, 2025

BMTC–132 : DIFFERENTIAL EQUATIONS

Time : 3 Hours

Maximum Marks : 100

Note : (i) *All questions are compulsory.*

(ii) *Use of calculator is not allowed.*

(iii) *Symbols have their usual meanings.*

1. State whether the following statements are true or false. Give a short proof or a counter-example in support of your answer : $5 \times 2 = 10$

(a) If $\cos \alpha$, $\cos \beta$ and $\cos \gamma$ are the direction cosines of a line, then $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 1$.

(b) For

$$f(x, y) = \frac{(x-y)^2}{x^2 + y^2}, \lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right) = 0$$

(c) For $z(x, y) = \sin^{-1} \left(\frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \right)$,

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

(d) The family of parabolas $y^2 = 2cx + c^2$, c being a constant is self orthogonal.

(e) The solution of the differential equation $(D^4 - 1)y = 0$, is $c_1 + c_2x + c_3e^x + c_4e^{-x}$.

2. (a) Solve the differential equation : 5

$$2x^3y dx + (x^4 + y^4)dy = 0, \quad x > 0, y > 0.$$

(b) Solve : 5

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y-x+1}{y+x+5}$$

(c) Solve : 5

$$(3x^2y^4 + 2xy)dx + (2x^3y^3 - x^2)dy = 0$$

3. (a) Solve : 5

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = e^x + 4$$

(b) Find the equation of plane passing through the points (1, 3, 2), (3, -1, 6) and (5, 2, 0). 5

(c) Check the continuity of the function at (0, 0) : 5

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & \text{if } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{if } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

4. (a) Find $\frac{dz}{dt}$ if $z = xy$, $x = t$ and $y = e^t$. 4

- (b) Draw a rough sketch of the level curves for the following function for the values of c given : 6

(i) $f(x, y) = x^2 + 4y^2, \quad c = 1, 4, 9$

(ii) $f(x, y) = \frac{x}{y}, \quad c = 0, 1, -1$

- (c) Verify Cauchy-Schwarz inequality for :

5

$$a = (0, -1, \sqrt{3}) \text{ and } b = (-3, 0, 4)$$

5. (a) Show that $f_{xy}(0, 0) \neq f_{yx}(0, 0)$ for the function $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ defined by : 5

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^5}{x^2 + y^4}, & \text{if } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{if } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- (b) If $z = \tan^{-1} \frac{x^3 + y^3}{x + y}$, then show that : 5

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = \sin 2z .$$

- (c) The population of a town grows at a rate proportional to the population at any time. Its initial population of 500 increases by 15% in 10 years. What will be the population in 30 years ? 5

6. (a) Solve : 5

$$p^2 y + 2px = y$$

- (b) Find the solution of differential equation : 6

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = x^2 + 2x,$$

using the method of undertermined coefficients.

- (c) Find the differential equation of the space curves in which the families of surfaces : 4

$$u = xy = c_1$$

and $v = x^4 - z^4 - 2xyz^2 = c_2$

intersect.

7. (a) Solve : 5

$$(1 + xy)y dx + (1 - xy)x dy = 0, x > 0, y > 0.$$

- (b) Find all the second order partial derivatives of the function : 5

$$f(x, y) = x^4 + y^4 \sin x^4$$

- (c) If y_1 and y_2 are functions of x possessing derivatives at least upto first order, then y_1 and y_2 are linearly dependent iff their Wronskian $w(y_1, y_2) = 0$. Prove. 5

BMTC-132

विज्ञान स्नातक (सामान्य) / कला स्नातक
(सामान्य) / विज्ञान स्नातक (बहुविषयक) / कला
स्नातक (बहुविषयक) / विज्ञान स्नातक (गणित)
(बी. एस.-सी. जी./बी. ए. जी./बी. एस.-सी. एम./
बी. ए. एम./बी. एस.-सी. एफ. एम. टी.)

सत्रांत परीक्षा

दिसम्बर, 2025

बी.एम.टी.सी.-132 : अवकल समीकरण

समय : 3 घण्टे

अधिकतम अंक : 100

नोट : (i) सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।

(ii) कैल्कुलेटर का प्रयोग करने की अनुमति नहीं है।

(iii) संकेतों के अपने अर्थ सामान्य हैं।

1. बताइए कि निम्नलिखित कथन सत्य हैं या असत्य। अपने उत्तर के पक्ष में लघु उपपत्ति या प्रति-उदाहरण दीजिए :

$$5 \times 2 = 10$$

- (क) यदि $\cos \alpha$, $\cos \beta$ और $\cos \gamma$ एक रेखा की

$$\text{दिक् कोज्याएँ हैं, तो } \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 1$$

होगा।

- (ख) $f(x, y) = \frac{(x-y)^2}{x^2 + y^2}$ के लिए

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right) = 0$$

है।

- (ग) $z(x, y) = \sin^{-1} \left(\frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \right)$ के लिए

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

है।

- (घ) परवलयों का परिवार $y^2 = 2x + c^2$, जहाँ c एक अचर है, स्वयं लांबिक (ऑर्थोगोनल) है।

- (ङ) अवकल समीकरण $(D^4 - 1)y = 0$ का हल

$$c_1 + c_2x + c_3e^x + c_4e^{-x} \text{ है।}$$

2. (क) अवकल समीकरण : 5

$$2x^3y dx + (x^4 + y^4) dy = 0, x > 0, y > 0$$

को हल कीजिए।

- (ख) हल कीजिए : 5

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - x + 1}{y + x + 5}$$

- (ग) हल कीजिए : 5

$$(3x^2y^4 + 2xy) dx + (2x^3y^3 - x^2) dy = 0$$

3. (क) हल कीजिए : 5

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2 \frac{dy}{dx} + y = e^x + 4$$

- (ख) बिन्दुओं (1, 3, 2), (3, -1, 6) और (5, 2, 0) से गुजरने वाले समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए। 5

- (ग) फलन : 5

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & \text{यदि } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{यदि } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

की (0, 0) पर सांतत्यता की जाँच कीजिए।

4. (क) यदि $z = xy$, $x = t$ और $y = e^t$ है, तो $\frac{dz}{dt}$ ज्ञात कीजिए। 4

(ख) दिए गए c के मान के लिए निम्नलिखित फलन के लिए स्तर वक्र का एक कच्चा रेखाचित्र बनाइए : 6

(i) $f(x, y) = x^2 + 4y^2$, $c = 1, 4, 9$

(ii) $f(x, y) = \frac{x}{y}$, $c = 0, 1, -1$

(ग) $a = (0, -1, \sqrt{3})$ और $b = (-3, 0, 4)$ के लिए कौशी-श्वार्ज़ असमानता को सत्यापित कीजिए। 5

5. (क) दर्शाइए कि परिभाषित फलन $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$: 5

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^5}{x^2 + y^4}, & \text{यदि } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \text{ यदि } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

के लिए $f_{xy}(0, 0) \neq f_{yx}(0, 0)$ ।

(ख) यदि $z = \tan^{-1} \frac{x^3 + y^3}{x + y}$ है, तो दर्शाइए कि : 5

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = \sin 2z$$

(ग) एक शहर की जनसंख्या में किसी (उस) समय की जनसंख्या के समानुपात की दर पर वृद्धि होती है। उसकी प्रारम्भिक जनसंख्या 500 में 10 वर्षों में 15% वृद्धि हो जाती है। 30 वर्षों में यह जनसंख्या कितनी हो जाएगी ? 5

6. (क) हल कीजिए : 5

$$p^2 y + 2px = y$$

(ख) अनिर्धारित गुणांकों की विधि के उपयोग द्वारा अवकल समीकरण : 6

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = x^2 + 2x$$

को हल कीजिए।

(ग) समष्टि वक्रों के अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए, जिनमें पृष्ठों $u = xy = c_1$ और $v = x^4 - z^4 - 2xyz^2 = c_2$ के कुल प्रतिच्छेद करते हैं। 4

7. (क) हल कीजिए : 5

$$(1 + xy)y dx + (1 - xy)x dy = 0, x > 0, y > 0.$$

(ख) फलन $f(x, y) = x^4 + y^4 \sin x^4$ के सभी दूसरे क्रम के आंशिक अवकल ज्ञात कीजिए। 5

(ग) यदि y_1 एवं y_2 कम से कम पहले क्रम तक के अवकल गुणांक रखने वाले के x फलन हैं, तब सिद्ध कीजिए कि y_1 एवं y_2 रैखिक निर्भर होंगे यदि और केवल यदि उनका रांसकियन $w(y_1, y_2) = 0$ है। 5

× × × × ×