No. of Printed Pages : 19 **BMTC–133**

BACHELOR OF SCIENCE (GENERAL)/BACHELOR OF ARTS (GENERAL) (BSCG/BAG)

Term-End Examination

December, 2025

BMTC-133 : REAL ANALYSIS

Time : 3 Hours *Maximum Marks : 100*

Note : *(i) Question No. **1** is **compulsory**.*

*(ii) Do any **six** questions from Q. Nos. **2** to **8**.*

---

1. Which of the following statements are true *or* false ? Justify your answers by giving a

short proof or a counter-example, whichever is appropriate : 5×2=10

(a) Every strictly increasing function is invertible.

(b) The function f given by :

$$f(x) = |x+1| + |x-3|; \quad x \in \mathbb{R}$$

is differentiable at $x = -2$.

(c) The series :

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

is divergent.

(d) The function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, defined by $f(x) = [x]$ is not integrable in the interval $[1, 5]$.

(e) The equation $x^3 - 12x + 6 = 0$ has a root in the interval $[-2, 2]$.

2. (a) Using principle of induction, prove that :

$$(\cos\theta - i\sin\theta)^n = \cos n\theta - i\sin n\theta,$$

for all $\theta \leq \mathbb{R}$ and $n \in \mathbb{N}$. 5

(b) (i) Prove that the sequence

$$\left(\frac{\cos n}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$$

is convergent. 3

(ii) If sequences (a_n) and (b_n) are divergent, is the sequence $(a_n + b_n)$ divergent ? Justify your answer. 2

(c) Verify the function f given by :

$$f(x) = 2x^2 - 3x + 7 + |x + 3|$$

for continuity and differentiability at $x = -3$. 5

3. (a) State Lagrange's Mean Value Theorem. Show that for the function $f(x) = x^3 - 30x - 12$, there exists a $c \in]2, 3[$ such that $f'(c) = -15$. Find a value for such a point c. 5

(b) Apply the Cauchy's integral test to evaluate the limit : 5

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{n^2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2-1^2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2-2^2}}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2-(n-1)^2}}\right]$$

(c) Test the following series for convergence : 5

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1.3.5.......(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n)}x^n$$

for all positive values of x.

4. (a) Prove or disprove that $\sqrt{10}$ is a rational number. 4

(b) Show that the sequence $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, where : 5

$$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n-1}$$

in convergent.

(c) Let $f(x) = 2x - 1,\ x \in [0, 1]$. Let P_n be the tagged partition formed by the sub-intervals : 6

$$I_1 = \left[0, \frac{1}{n}\right], I_2 = \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right], ...,$$

$$I_i = \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right], I_n = \left[\frac{n-1}{n}, 1\right]$$

where the tags are $t_i = \frac{i}{n}$ $(i = 1, 2, ..., n)$.

Calculate the Riemann sum. Is f Riemann integrable ? Justify your answer.

5. (a) Find all the limit points of the set $\left\{\frac{1+(-1)^n}{2} - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$. 5

(b) Test the following series for convergence : 5

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 2}{3^n + 4^n}$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt[3]{n} - 1}$

(c) Find the radius of convergence and the interval of convergence of the power series : 5

$$\Sigma \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n.$$

6. (a) For a given non-empty subset S of $\mathbb{R}$, let aS = { as : $s \in$ S}. Show that : 5

$$\sup (2S) = 2 \sup S$$

$$\sup (-2S) = -2 \inf S$$

(b) Using Weierstrass' M-test, show that the series : 5

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(n+1)(n+3)^2}$$

converges uniformly in [0, 4].

(c) Find the maximum and minimum values for the function f defined by : 5

$$f(x) = x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x + 7, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

7. (a) Write down the contrapositive of the following statement and prove it : 5

"If f is a $1 - 1$ function from a finite set X into itself, then f must be surjective."

(b) Find the Maclaurin's series for $\log(1+x)$, $x \in [0, 1]$. 5

(c) Examine the function : 5

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2 + 3x^4}{4x^2}, & \text{when } x \neq 0 \\ 1, & \text{when } x = 0 \end{cases}$$

for continuity at $x = 0$. If it is not continuous, name the nature of discontinuity.

8. (a) State Cauchy's Mean Value Theorem and verify the theorem for the function f and g defined as : 5

$$f(x) = x^2 \text{ and } g(x) = x^4, \ \forall \ x \in [2, 4]$$

(b) Let g be a function defined as $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ such chat : 5

$$g(0) = 0 \text{ and } g(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

when $x \in\,]\,0, 1[$. Show that g' exists but it is not Riemann integrable.

(c) If $f_n(x) = \dfrac{nx}{1 + n^2x^2}$ for all $x \in \mathbb{R}$, then find the pointwise limit of the sequence of functions, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Is this sequence uniformly convergent ? Justify your answer. 5

BMTC–133

विज्ञान स्नातक (सामान्य)/कला स्नातक (सामान्य)

(बी. एस-सी. जी./बी. ए. जी.)

सत्रांत परीक्षा

दिसम्बर, 2025

बी.एम.टी.सी.–133 : वास्तविक विश्लेषण

समय : 3 घण्टे *अधिकतम अंक : 100*

नोट : *(i) प्रश्न सं. **1** अनिवार्य है।*

*(ii) प्रश्न सं. **2** से **8** तक किन्हीं **छः** प्रश्नों के उत्तर दीजिए।*

1. अग्रलिखित कथनों में से कौन-से कथन सत्य हैं और कौन-से असत्य ? लघु उपपत्ति या प्रति-उदाहरण, जो भी उचित हो, के साथ अपने उत्तरों के कारण बताइए : 5×2=10

(अ) प्रत्येक निरन्तर वर्धमान फलन व्युत्क्रमणीय होता है।

(ख) $f(x) = |x + 1| + |x - 3|;\ x \in \mathbb{R}$ द्वारा देय फलन f बिन्दु $x = -2$ पर अवकलनीय है।

(ग) श्रेणी $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots\ldots\ldots\ldots$ अपसारी है।

(घ) $f(x) = [x]$ द्वारा परिभाषित फलन $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, अंतराल $[1, 5]$ में समाकलनीय नहीं है।

(ङ) समीकरण $x^3 - 12x + 6 = 0$ अंतराल $[-2, 2]$ में एक मूल है।

2. (क) आगमन के सिद्धान्त का उपयोग करते हुए सिद्ध कीजिए कि :

$$(\cos\theta - i\sin\theta)^n = \cos n\theta - i\sin n\theta,$$

सभी $\theta \leq \mathbb{R}$ और $n \in \mathbb{N}$ के लिए सत्य है। 5

(ख) (i) सिद्ध कीजिए कि अनुक्रम $\left(\dfrac{\cos n}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ अभिसारी है। 3

(ii) यदि अनुक्रम (a_n) और (b_n) अपसारी हों, तो अनुक्रम $(a_n + b_n)$ अपसारी होगा। अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। 2

(ग) $f(x) = 2x^2 - 3x + 7 + |x + 3|$ द्वारा देय फलन f के लिए बिन्दु $x = -3$ पर सांतत्य और अवकलनीयता की जाँच कीजिए। 5

3. (क) लैग्रांज की माध्यमान प्रमेय का कथन दीजिए। दर्शाइए कि फलन $f(x) = x^3 - 30x - 12$ के लिए एक $c \in]2, 3[$ का अस्तित्व है ताकि $f'(c) = -15$ है। ऐसे एक बिन्दु c के लिए एक मान ज्ञात कीजिए। 5

(ख) सीमा :

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{n^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 - 1^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 - 2^2}} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2 - (n-1)^2}}\right]$$

का मान निकालने के लिए, कौशी समाकल परीक्षण का उपयोग कीजिए। 5

(ग) x के सभी धनात्मक मानों के लिए, श्रेणी : 5

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1.3.5.......(2n-1)}{2.4.6\ ...\ (2n)}\ x^n$$

की अभिसारिता की जाँच कीजिए।

4. (क) सिद्ध या असिद्ध कीजिए कि $\sqrt{10}$ एक परिमेय संख्या है। 4

(ख) दर्शाइए कि अनुक्रम $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, जहाँ : 5

$$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n-1}$$

अभिसारी है।

(ग) मान लीजिए कि $f(x) = 2x - 1,\ x \in [0, 1]$ है।

मान लीजिए कि P_n उप-अन्तरालों :

$$I_1 = \left[0, \frac{1}{n}\right], I_2 = \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right], ...$$

$$I_i = \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right], I_n = \left[\frac{n-1}{n}, 1\right]$$

द्वारा निर्मित टैग किये गये विभाजन हैं, जहाँ चिन्ह (टैग) $t_i = \frac{i}{n}$ $(i = 1, 2, ... n)$ है। रीमान योग परिकलित कीजिए। क्या f रीमान समाकलनीय है ? अपने उत्तर की कारण द्वारा पुष्टि कीजिए। 6

5. (क) समुच्चय $\left\{\frac{1+(-1)^n}{2} - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$ के सभी सीमा बिन्दुओं को ज्ञात कीजिए। 5

(ख) अभिसारिता के लिए निम्नलिखित श्रेणियों की जाँच कीजिए : 5

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 2}{3^n + 4^n}$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt[3]{n} - 1}$

(ग) घात श्रेणी $\sum \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$ की अभिसरण–त्रिज्या और उसका अभिसरण–अंतराल ज्ञात कीजिए। 5

6. (क) $\mathbb{R}$ के एक दिए हुए अरिक्त उपसमुच्चय S के लिए, मान लीजिए कि $aS = \{ as : s \in S\}$ है। दर्शाइए कि : 5

$$\sup (2S) = 2 \sup S \text{ है, और}$$

$$\sup (-2S) = -2 \inf S \text{ है।}$$

(ख) वीयर्स्ट्रास के M-टेस्ट के उपयोग से, दर्शाइए कि श्रेणी : 5

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(n+1)\,(n+3)^2}$$

अंतराल [0, 4] में एकसमानतः अभिसरित होती है।

(ग) $f(x) = x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x + 7, \ \forall \ x \in \mathbb{R}$.

द्वारा परिभाषित फलन f के लिए अधिकतम और न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए। 5

7. (क) निम्नलिखित कथन के प्रतिधनात्मक को लिखिए तथा उसे सिद्ध कीजिए : 5

"यदि f एक परिमित समुच्चय X से X तक परिभाषित एक $1 - 1$ फलन है, तो f को अवश्य ही आच्छादक होना चाहिए।"

(ख) $\log(1 + x)$, $x \in [0, 1]$ के लिए मैक्लॉरिन श्रेणी ज्ञात कीजिए। 5

(ग) फलन : 5

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2 + 3x^4}{4x^2}, & \text{जब } x \neq 0 \\ 1 \quad , & \text{जब } x = 0 \end{cases}$$

की $x = 0$ पर सांतत्य के लिए जाँच कीजिए। यदि यह सांतत्य नहीं है, तो असंतता की प्रकृति का नाम बताइए।

8. (क) कौशी की माध्यमान प्रमेय का कथन दीजिए तथा $f(x) = x^2$ और $g(x) = x^4, \forall\ x \in [2, 4]$ के रूप में परिभाषित फलनों f और g के लिए, इस प्रमेय का सत्यापन कीजिए। 5

(ख) मान लीजिए कि $g:[0,1] \to \mathbb{R}$ इस प्रकार है $g(0) = 0$ और $g(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$ के रूप में परिभाषित g एक फलन है। दर्शाइए कि g' का अस्तित्व है, परन्तु यह रीमान समाकलनीय नहीं है। 5

(ग) यदि सभी $x \in \mathbb{R}$ के लिए $f_n(x) = \dfrac{nx}{1 + n^2x^2}$ है, तो फलनों के अनुक्रम $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ की बिन्दुशः सीमा ज्ञात कीजिए। क्या यह अनुक्रम एकसमानतः अभिसारी है ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। 5

× × × × ×