No. of Printed Pages : 19 **BMTC–134**

B. A. (GENERAL)/B. SC. (GENERAL)/ B. SC. (MATHEMATICS)

(BAG/BSCG/BSCFMT)

Term-End Examination

December, 2025

BMTC-134 : ALGEBRA

Time : 3 Hours *Maximum Marks : 100*

Note : *(i) There are eight questions in this paper.*

(ii) Question No. 8 is compulsory.

*(iii) Do any **six** questions from Q. No. **1** to Q. No. **7**.*

(iv) Show your rough work at the bottom or on the right side of the page.

(v) Use of calculators is not allowed.

---

1. (a) List the elements of the symmetric group S_3 and write down the orders of each of its elements. 5

   (b) Prove or disprove : The union of two subgroups of a group G is a subgroup of G. 3

   (c) Define an ideal. List all the ideals of the ring of real quarternions. 4

   (d) Find the nil radical of $\mathbb{Z}_8$. 3

2. (a) Show that every subgroup of an abelian group G is a normal subgroup of G. Is it necessarily true that if every subgroup of a group G is a normal subgroup of G, then G is abelian ? Justify your answer. 6

(b) If $GL_2(\mathbb{C})$ denotes the group of all 2×2 non-singular matrices over $\mathbb{C}$ and if $H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \middle| \begin{matrix} a, b, c \in \mathbb{C} \\ ac \neq 0 \end{matrix} \right\}$, then check whether or not H is a subgroup of $GL_2(\mathbb{C})$. Further, if H is a subgroup of $GL_2(\mathbb{C})$ check whether or not H is a normal subgroup of $GL_2(\mathbb{C})$. 4

(c) For a prime p, show that the polynomial $x^{p-1} + x^{p-2} + ... + x + 1$ is irreducible over $Q[x]$. 5

3. (a) Prove that any cyclic group is abelian. Is the converse true ? Give reasons for your answer. 4

(b) If $f : A_5 \to G$ is a non-trivial group homomorphism, prove that $O(G) \geq 60$. 3

(c) Let $R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \middle| \; a, b \in \mathbb{R} \right\}$ and

$$I = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| \; c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Prove the following : 8

(i) R is a subring of $M_2(\mathbb{R})$ with identity.

(ii) I is an ideal of $\mathbb{R}$.

(iii) $\frac{R}{I} \cong \mathbb{R}$.

4. (a) Determine all ring homomorphisms from $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ to $\mathbb{Z}$. 6

(b) Express $f(x)$ as $g(x)q(x) + r(x)$, where $r(x) = 0$ or deg $r(x) <$ deg $g(x)$, where : 3

$$f(x) = x^3 - \overline{3}x^2 + \overline{2}x + \overline{4}$$

and $g(x) = \overline{3}x + \overline{1} \in \mathbb{Z}_5[x]$

(c) Find all the prime ideals of the ring $\mathbb{Z}_{28}$. 6

5. (a) Show that $x^3 + 6x^2 + 30x + 1 \in \mathbb{Z}[x]$ is irreducible using Mod p irreducibility test. 4

(b) (i) Show that if G is a group and $x \in G$ has odd order, there exists a $y \in G$ such that $y^2 = x$. 3

(ii) Show that the converse of Lagrange's theorem is not true. 5

(c) Show that $\mathbb{Z}_n$ is a field iff n is a prime. 3

6. (a) Find all subgroups of $\mathbb{Z}_{42}$ and give a subgroup diagram for $\mathbb{Z}_{42}$. 6

(b) Find the signature of : 4

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in S_5$$

(c) Show that :

$$\frac{GL_2(\mathbb{R})}{SL_2(\mathbb{R})} \cong \mathbb{R}^*,$$

where $GL_2(\mathbb{R})$ is the group of 2×2 non-singular matrices over $\mathbb{R}$, $SL_2(\mathbb{R})$ is the group of 2×2 matrices over $\mathbb{R}$ with determinant 1 and $\mathbb{R}^*$ is the group of non-zero real numbers. 5

7. (a) State the orbit-stabilizer theorem. If X is a finite non-empty set, G is a subgroup of S(X) and there is an $x \in X$ such that $\left|\underset{G}{\text{Orb}}(x)\right| = 2$, show that $\underset{G}{\text{Stab}}(x) \lhd G$. 3

(b) Let :

$$R = \left\{ \frac{m}{n} \middle| m, n \in \mathbb{Z}, n = 2^a\, 3^b, a, b \in \mathbb{Z}, a, b, \geq 0 \right\}.$$

Check whether R is a ring under the usual addition and multiplication of rational numbers. Is it commutative ? Does it have an identity element ? Justify your answer. 6

(c) Let F be a field and $p(x) \in F[x]$ with deg $p(x) \geq 2$. If $p(x)$ is irreducible in $F[x]$, then prove that $p(x)$ has no roots in F. Is the converse true ? Give reasons for your answer. 3

(d) For $m, n, \in \mathbb{Z}$, show that $n\mathbb{Z} \cap m\mathbb{Z} = l\mathbb{Z}$, where $l = [m, n]$, the l.c.m. of n and m. 3

8. Which of the following statements are true and which are false ? Justify your answer with a short proof a counter-example whichever is appropriate. Marks will be given only for proper justification. 10

(a) There is no infinite field of characteristic $p \neq 0$.

(b) There exists an infinite group G in which every element of G is of finite order.

(c) The symmetric group S_n is simple for every $n \geq 5$.

(d) Any polynomial of degree $n \geq 1$ over a commutative ring R has atmost n roots in R.

(e) Every prime ideal of a ring R is a maximal ideal of R.

BMTC–134

कला स्नातक (सामान्य)/विज्ञान स्नातक

(सामान्य)/विज्ञान स्नातक (गणित)

(बी. ए. जी./बी. एस–सी. जी./

बी. एस.–सी. एफ. एम. टी.)

सत्रांत परीक्षा

दिसम्बर, 2025

बी.एम.टी.सी.–134 : बीजगणित

समय : 3 घण्टे *अधिकतम अंक : 100*

नोट : *(i) इस प्रश्न-पत्र में आठ प्रश्न हैं।*

*(ii) प्रश्न संख्या **8** अनिवार्य है।*

*(iii) प्रश्न संख्या **1** से **7** तक से कोई भी **छः** प्रश्न कीजिए।*

(iv) अपना रफ कार्य पृष्ठ के नीचे या दायीं ओर दिखाइए।

(v) कैल्कुलेटर प्रयोग करने की अनुमति नहीं है।

1. (क) सममित समूह S_3 के अवयवों की सूची बनाइए और उसके प्रत्येक अवयव की कोटि लिखिए। 5

(ख) सिद्ध कीजिए या असत्य सिद्ध कीजिए :

समूह G के दो उपसमूहों का सम्मिलन G का उपसमूह होता है। 3

(ग) गुणजावली को परिभाषित कीजिए। वास्तविक चतुष्टियों की वलय की सभी गुणजावलियों की सूची बनाइए। 4

(घ) $\mathbb{Z}_8$ की शून्य करणी निकालिए। 3

2. (क) दिखाइए कि एक आबेली समूह G का प्रत्येक उपसमूह प्रसामान्य उपसमूह होता है। क्या यह जरूरी है कि यदि एक समूह G के सभी उपसमूह प्रसामान्य हैं, तो G आबेली समूह होना चाहिए ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। 6

(b) यदि $GL_2(\mathbb{C})$ $\mathbb{C}$ पर सभी 2×2 अव्युत्क्रमणीय आव्यूहों का समूह है और यदि $H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{c} a, b, c \in \mathbb{C} \\ ac \neq 0 \end{array} \right\}$, तो जाँच कीजिए कि H समूह $GL_2(\mathbb{C})$ का उपसमूह है या नहीं। आगे, यदि H समूह $GL_2(\mathbb{C})$ का उपसमूह है, तो जाँच कीजिए कि H समूह $GL_2(\mathbb{C})$ का उपसमूह है या नहीं। 4

(ग) एक अभाज्य संख्या p के लिए दिखाइए कि बहुपद $x^{p-1} + x^{p-2} + ... + x + 1$, $Q[x]$ पर अखण्डनीय है। 5

3. (क) सिद्ध कीजिए कि सभी चक्रीय समूह आबेली होते हैं। क्या इस कथन का विलोम सत्य है ? अपने उत्तर के कारण बताइए। 4

(ख) यदि $f : A_5 \to G$ एक अतुल्य समूह समकारिता है, तो सिद्ध कीजिए कि $O(G) \geq 60$. 3

(ग) मान लीजिए कि $R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \middle| \ a, b \in \mathbb{R} \right\}$

और $I = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| \ c \in \mathbb{R} \right\}$ ।

निम्नलिखित को सिद्ध कीजिए : 8

(i) R वलय $M_2(\mathbb{R})$ की तत्समकी उपवलय है।

(ii) I वलय R की गुणजावली है।

(iii) $\frac{R}{I} \cong \mathbb{R}$.

4. (क) $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ से $\mathbb{Z}$ तक सभी वलय समाकारिता निर्धारित कीजिए। 6

(ख) $f(x)$ को $g(x)q(x) + r(x)$ के रूप में व्यक्त कीजिए, जहाँ $r(x) = 0$ या $\deg r(x) < \deg g(x)$, जहाँ : 3

$$f(x) = x^3 - \overline{3}x^2 + \overline{2}x + \overline{4}$$

तथा $$g(x) = \overline{3}x + \overline{1} \in \mathbb{Z}_5[x]$$

(ग) वलय $\mathbb{Z}_{28}$ की सभी अभाज्य गुणजावली निकालिए। 6

5. (क) Mod p अखण्डनीय परीक्षण द्वारा दिखाइए कि बहुपद

$x^3 + 6x^2 + 30x + 1 \in \mathbb{Z}[x]$ अखण्डनीय है। 4

(ख) (i) दिखाइए कि यदि G एक समूह है और $x \in G$ विषम कोटि वाला अवयव है, तो एक $y \in G$ का अस्तित्व है, जिसके लिए $y^2 = x$ है। 3

(ii) दिखाइए कि लैग्रांज प्रमेय का विलोम सत्य नहीं है। 5

(ग) दिखाइए कि $\mathbb{Z}_n$ क्षेत्र होता है तभी और केवल तभी जबे n एक अभाज्य संख्या है। 3

6. (क) $\mathbb{Z}_{42}$ के सभी उपसमूह ज्ञात कीजिए और $\mathbb{Z}_{42}$ का उपसमूह आरेख दीजिए। 6

(ख) क्रमचय $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in S_5$ का चिह्नक निकालिए। 4

(ग) दिखाइए कि :

$$\frac{GL_2(\mathbb{R})}{SL_2(\mathbb{R})} \cong \mathbb{R}^*,$$

जहाँ $GL_2(\mathbb{R})$ वास्तविक 2×2 व्युत्क्रमणीय आव्यूहों का समूह है। $SL_2(\mathbb{R})$ सारणिक 1 वाले वास्तविक 2×2 आव्यूहों का उपसमूह है और $\mathbb{R}^*$ शून्येतर वास्तविक संख्याओं का समूह है। 5

7. (क) कक्ष-स्थिरक प्रमेय बताइए। यदि X एक परिमित, अरिक्त समुच्चय है और समूह G समूह S(X) का

उपसमूह है और $x \in X$ का अस्तित्व है जिसके लिए

$\left|\underset{G}{\text{Orb}}\,(x)\right| = 2$, तो दिखाइए कि $\underset{G}{\text{Stab}}\,(x) \lhd G$. 3

(ख) मान लीजिए कि :

$$R = \left\{\frac{m}{n}\,\middle|\, m, n \in \mathbb{Z}, n = 2^a\, 3^b, a, b \in \mathbb{Z}, a, b, \geq 0\right\}$$

जाँच कीजिए कि R परिमेय संख्याओं के साधारण जोड़ और गुणन की सापेक्ष वलय है या नहीं। क्या R क्रमचय है ? क्या इसका तत्समक अवयव है ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। 6

(ग) मान लीजिए कि F एक क्षेत्र है और $p(x) \in F[x]$, $\deg\ p(x) \geq 2$ । यदि $p(x)$ $F[x]$ में अखण्डनीय है, तो दिखाइए कि $p(x)$ का F में कोई मूल नहीं है। क्या विलोम सत्य है ? अपने उत्तर के कारण बताइए। 3

(घ) $m, n, \in \mathbb{Z}$ के लिए दिखाइए कि $n\mathbb{Z} \cap m\mathbb{Z} = l\mathbb{Z}$, जहाँ $l = [m, n]$, n और m का l.c.m. है। 3

8. निम्नलिखित कथनों में से कौन-से कथन सत्य और कौन-से कथन असत्य हैं ? अपने उत्तर को एक लघु उपपत्ति या प्रति-उदाहरण के रूप में दीजिए जो भी उचित हो। उचित पुष्टिकरण के साथ ही अंक दिए जाएँगे : 10

(क) अभिलाक्षणिक $p \neq 0$ वाला कोई भी अनन्त क्षेत्र नहीं है।

(ख) एक अनन्त समूह G का अस्तित्व है जिसके सभी अवयवों की कोटि परिमित है।

(ग) प्रत्येक $n \geq 5$ के लिए सममित समूह S_n सरल है।

(घ) किसी क्रमचय वलय R पर किसी भी कोटि $n \geq 1$ बहुपद के अधिकतम n मूल होते हैं।

(ङ) किसी वलय R की प्रत्येक अभाज्य गुणजावली R की उच्चिष्ठ गुणजावली है।

× × × × ×