

**BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME
(BDP) (BSCG/BAG/BSCM/BAM/BSCFMT)
Term-End Examination
December, 2025**

BMTE-141 : LINEAR ALGEBRA

Time : 3 Hours

Maximum Marks : 100

Note : (i) *There are eight questions in this paper.*

(ii) *The **eighth** question is compulsory.*

(iii) *Do any **six** questions from Question Nos. 1 to 7.*

(iv) *Use of calculator is not allowed.*

(v) *Do your rough work in a clearly identifiable part of the bottom of the same page or in the side of the page only.*

1. (a) Let A be an $m \times n$, B an $n \times k$ and C an $m \times k$ matrix. Which of the following operations are possible ?

(i) $AB+C$

(ii) A^tC+B

For those operations that are possible, what will be order of the matrix obtained ? 3

(b) Find the rank and nullity of the matrix :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

using row reduction. 3

(c) Determine the equation of the plane corresponding to the vector space spanned by the vectors $(1, 1, 1)$ and $(-1, 1, 1)$. 3

(d) Check whether the vector :

$$v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

is an eigen vector for the matrix :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Find the corresponding eigen value. 2

(e) Define the norm of a vector in an inner product space. Find the norm of the vector $(i, 1-i, 1+i) \in \mathbf{C}^3$. 2

(f) Find the magnitude of the volume of the box spanned by the vectors $(1, 1, 1)$, $(1, 1, 0)$ and $(0, 1, 1)$. 2

2. (a) If the matrix of a linear transformation $T: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ with respect to the standard basis is :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

find the linear transformation. 3

- (b) Find the rank and signature for each of the forms $x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - x_4^2$ and $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2$. Are these forms equivalent? Justify your answer. 3

- (c) Let $V_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & d \end{bmatrix} \mid a, c, d \in \mathbf{R} \right\}$ and

$$V_2 = \left\{ \begin{bmatrix} u & v \\ 0 & r \end{bmatrix} \mid u, v, r \in \mathbf{R} \right\}$$
 be subspaces of

$M_2(\mathbf{R})$. Prove that $M_2(\mathbf{R}) = V_1 + V_2$. Is

$M_2(\mathbf{R}) = V_1 \oplus V_2$? Justify your answer.

(d) Let $u_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$ and $u_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$.

Show that $\{u_1, u_2\}$ forms an orthonormal basis for \mathbf{R}^2 . Write the vector $(3, 2)$ as a linear combination of u_1 and u_2 . 2

(e) Let A be a 4×4 matrix. Write down the elementary matrices with which, when we multiply A on the left, will perform the following row operations on A : 2

(i) $R_2 \leftrightarrow 3R_2$

(ii) $R_3 \rightarrow R_3 - 3R_1$

(f) Find the values of a for which the

matrix $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & a \\ a & 0 & 1 \end{bmatrix}$ is not invertible. 2

3. (a) Find the conditions on b_1, b_2 and b_3 so that the following system of equations is consistent : 7

$$x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = b_1$$

$$-x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = b_2$$

$$x_1 + 5x_2 + 5x_3 + x_4 = b_3$$

- (b) Find the adjugate of the matrix :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Further, find the inverse of A using the adjugate. 5

- (c) Is the matrix :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

in Row Reduced Echelon form ? Is it in Row Reduced form ? Justify your answer. If it is not in Row Reduced Echelon form, use row operations to reduce it to Row Reduced Echelon form. 3

4. (a) Check whether the matrix :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

is diagonalisable. If it is diagonalisable, find a diagonal matrix D and an invertible matrix P such that $P^{-1}AP = D$. 8

- (b) Let $f : \mathbf{C}^3 \rightarrow \mathbf{C}$ be the linear functional defined by $f((z_1, z_2, z_3)) = z_1 - iz_2 + iz_3$.

Find $(y_1, y_2, y_3) \in \mathbf{C}^3$ such that : 3

$$f((z_1, z_2, z_3)) = \langle (z_1, z_2, z_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle.$$

(c) Apply the coordinate transformation

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \text{ to conic } x^2 + y^2 + 6xy = 1.$$

What is the nature of this conic ? 4

5. (a) Using row reduction, find a basis B for the vector space spanned by the set :

$$S = \{(1, -1, 1), (-1, 1, 2), (1, 2, 4)\}$$

such that $B \subseteq S$. 4

(b) Show that the linear transformation

$$T = \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3 \text{ given by :}$$

$$T((x, y, z)) = (x, y, x + z)$$

is an isomorphism. 3

(c) Let $T = \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ be defined by

$$T((x, y)) = (x - y, x, y) \quad \text{and} \quad S = \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$$

be defined by $S((x, y, z)) = (x + y, y - z)$.

Let B_1 and B_2 be the standard bases of

\mathbf{R}^2 and \mathbf{R}^3 , respectively. Check that : 8

$$[T \circ S]_{B_2}^{B_2} = [T]_{B_2}^{B_1} \cdot [S]_{B_1}^{B_2}.$$

6. (a) Find the orthogonal canonical reduction of the quadratic form :

$$x^2 - y^2 + z^2 + 2xy + 2xz - 2yz.$$

Also, find its principal axes. 9

- (b) Find the vector equation of the plane determined by the points $(1, 1, 1)$, $(1, 1, 0)$ and $(2, 2, 1)$. Also, check whether $(2, 1, 1)$ lies on it. 3

(c) Define the coset of a subspace. Let :

$$W = \{(x, y, z) \mid x + y - z = 0\} \subseteq \mathbf{R}^3$$

Check whether vectors $(3, 1, 2)$ and $(1, 1, 3)$ are in the same coset of W or not. 3

7. (a) Let $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ be an ordered basis of \mathbf{R}^3 , where $u_1 = (1, 1, 1)$, $u_2 = (1, 0, -1)$ and $u_3 = (1, 1, 0)$. Use Gram-Schmidt orthogonalisation process on B to find an orthonormal basis for \mathbf{R}^3 . 5

(b) Let $B = \{(1, 0, 1), (0, 1, -2), (-1, -1, 0)\}$ be a basis of \mathbf{R}^3 . Find the dual basis of B . 5

(c) Check whether the set :

$$S = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_i \in \mathbf{R}, a_n \leq 0\}$$

is a subspace of \mathbf{R}^n or not. 3

- (d) If v_1, v_2 and v_3 are linearly independent vectors in a vector space V over \mathbf{C} , show that $v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_1$ are also linearly independent. 2

8. Which of the following statements are true and which are false ? Justify your answer with short proof or a counter-example : 10

- (a) Eigen values of a symmetric matrix are real.
- (b) If $S_1 \subset S_2$ are subsets of a vector space V and S_2 is linearly independent, S_1 is also linearly independent.
- (c) For any linear transformation :

$$T: \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^5, \text{Ker}(T) \neq \{0\}.$$

- (d) Every unitary matrix is Hermitian.
- (e) There exists a linear operator $T: \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^4$ with characteristic polynomial $(x-3)^2(x-5)(x-1)$ and minimal polynomial $(x-3)(x-5)$.

BMTE-141

स्नातक उपाधि कार्यक्रम (बी. डी. पी.)

(बी. एस-सी. जी./बी. ए. जी./बी. एस-सी. एम./

बी. ए. एम./बी. एस-सी. एफ. एम. टी.)

सत्रांत परीक्षा

दिसम्बर, 2025

बी.एम.टी.ई.-141 : रैखिक बीजगणित

समय : 3 घण्टे

अधिकतम अंक : 100

-
- नोट : (i) इस प्रश्न पत्र में आठ प्रश्न हैं।
- (ii) आठवाँ प्रश्न करना अनिवार्य है।
- (iii) प्रश्न संख्या 1 से 7 तक कोई भी छः प्रश्न कीजिए।
- (iv) कैलकुलेटर के प्रयोग की अनुमति नहीं है।
- (v) अपना रफ कार्य उसी पृष्ठ के नीचे या पृष्ठ के किनारे
के स्पष्ट रूप से पहचाने जाने योग्य भाग में कीजिए।
-

1. (क) मान लीजिए A एक $m \times n$, B एक $n \times k$ और C एक $m \times k$ आव्यूह है। निम्नलिखित में से कौन-सी संक्रियाएँ साध्य हैं ?

(i) $AB+C$

(ii) A^tC+B

जो संक्रियाएँ साध्य हैं उससे प्राप्त आव्यूह की कोटि क्या होगी ?

3

(ख) पंक्ति समानयन द्वारा आव्यूह $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ की

जाति एवं शून्यता प्राप्त कीजिए।

3

- (ग) सदिशों $(1,1,1)$ और $(-1,1,1)$ द्वारा विस्तृत सदिश समष्टि के संगत समतल का समीकरण निर्धारित कीजिए।

3

(घ) जाँच कीजिए कि सदिश $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ आव्यूह

$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ का आइगेन सदिश है या नहीं।

संगत आइगेन मान भी निकालिए। 2

(ङ) आंतर गुणन समष्टि में एक सदिश का मानक

परिभाषित कीजिए। सदिश $(i, 1-i, 1+i) \in \mathbf{C}^3$ का

मानक निकालिए। 2

(च) सदिश $(1, 1, 1)$, $(1, 1, 0)$ और $(0, 1, 1)$ द्वारा

विस्तृत बॉक्स का आयतन का परिमाण क्या है ? 2

2. (क) यदि मानक आधार के सापेक्ष रैखिक रूपांतरण

$T: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ का आव्यूह $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ है, तो रैखिक

रूपांतरण निकालिए। 3

(ख) समघात $x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - x_4^2$ और

$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2$ के जाति और चिह्नक

निकालिए। क्या ये समघात तुल्य हैं ? अपने उत्तर की

पुष्टि कीजिए।

3

(ग) मान लीजिए $V_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & d \end{bmatrix} \mid a, c, d \in \mathbf{R} \right\}$ और

$V_2 = \left\{ \begin{bmatrix} u & v \\ 0 & r \end{bmatrix} \mid u, v, r \in \mathbf{R} \right\}$ $M_2(\mathbf{R})$ की

उपसमष्टियाँ हैं। सिद्ध कीजिए कि

$M_2(\mathbf{R}) = V_1 + V_2$ । क्या $M_2(\mathbf{R}) = V_1 \oplus V_2$

? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।

3

(घ) मान लीजिए कि $u_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$ और

$u_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$ । दिखाइए कि $\{u_1, u_2\}$ \mathbf{R}^2

का प्रसामान्य लांबिक आधार है। सदिश $(3, 2)$ को

u_1 एवं u_2 के एकघात संचयन के रूप में लिखिए। 2

(ड) मान लीजिए कि A एक 4×4 आव्यूह है। उस प्रारम्भिक आव्यूह को लिखिए जिसको A के बायें तरफ से गुणा करने पर आव्यूह A पर निम्नलिखित पंक्ति संक्रियाएँ होंगी :

$$(i) R_2 \leftrightarrow 3R_2$$

$$(ii) R_3 \rightarrow R_3 - 3R_1$$

(च) a के उन मानों को ज्ञात कीजिए जिनके लिए आव्यूह

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & a \\ a & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ व्युत्क्रमणीय नहीं है।} \quad 2$$

3. (क) b_1, b_2 एवं b_3 पर प्रतिबंध निकालिए जिससे निम्नलिखित समीकरण निकाय संगत है :

$$x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = b_1$$

$$-x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = b_2$$

$$x_1 + 5x_2 + 5x_3 + x_4 = b_3$$

(ख) आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ का सहखण्डज ज्ञात

कीजिए। आगे सहखण्डज का प्रयोग करके A का

व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए।

5

(ग) क्या आव्यूह :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

पंक्ति समानीत सोपानक रूप में है ? क्या यह पंक्ति

समानीत रूप में है ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।

यदि यह आव्यूह पंक्ति समानीत सोपानक रूप में नहीं

है, तो पंक्ति संक्रियाओं के प्रयोग से आव्यूह को पंक्ति

समानीत सोपानक रूप में समानीत कीजिए।

3

4. (क) जाँच कीजिए कि आव्यूह

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

विकर्णनीय है। यदि विकर्णनीय है, तो आव्यूह P और

विकर्ण आव्यूह D निकालिए जिसके लिए

$$P^{-1}AP = D \quad 8$$

(ख) मान लीजिए कि $f : \mathbf{C}^3 \rightarrow \mathbf{C}$

$$f((z_1, z_2, z_3)) = z_1 - iz_2 + iz_3 \quad \text{द्वारा परिभाषित}$$

एक रेखिक फलनक है। $(y_1, y_2, y_3) \in \mathbf{C}^3$ ज्ञात

कीजिए जिसके लिए : 3

$$f((z_1, z_2, z_3)) = \langle (z_1, z_2, z_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle$$

(ग) शांकव $x^2 + y^2 + 6xy = 1$ पर निर्देशांक रूपांतरण

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

लागू कीजिए। इस शांकव की प्रकृति क्या है ? 4

5. (क) पंक्ति समानयन का उपयोग करते हुए समुच्चय

$$S = \{(1, -1, 1), (-1, 1, 2), (1, 2, 4)\}$$
 द्वारा विस्तृत

सदिश समष्टि के लिए एक आधार B निकालिए

जिसके लिए $B \subseteq S$ । 4

(ख) दिखाइए कि रैखिक रूपांतरण $T = \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$, जो

$$T((x, y, z)) = (x, y, x + z)$$
 द्वारा परिभाषित है, एक

तुल्यकारिता है। 3

(ग) मान लीजिए कि $T = \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$

$T((x, y)) = (x - y, x, y)$ द्वारा परिभाषित है और

$S = \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$ $S((x, y, z)) = (x + y, y - z)$

द्वारा परिभाषित है। मान लीजिए B_1 और B_2

क्रमशः, \mathbf{R}^2 और \mathbf{R}^3 के मानक आधार हैं। जाँच

कीजिए कि :

8

$$[T \circ S]_{B_2}^{B_2} = [T]_{B_2}^{B_1} \cdot [S]_{B_1}^{B_2}$$

6. (क) द्विघात समघात $x^2 - y^2 + z^2 + 2xy + 2xz - 2yz$

का लांबिक विहित समानयन ज्ञात कीजिए। मुख्य अक्ष

भी ज्ञात कीजिए।

9

(ख) बिन्दुओं $(1, 1, 1)$, $(1, 1, 0)$ और $(2, 2, 1)$ से

निर्धारित समतल का सदिश समीकरण निकालिए। यह

भी जाँच कीजिए कि $(2, 1, 1)$ उस समतल पर स्थित

है।

3

(ग) एक समुच्चय का सहसमुच्चय परिभाषित कीजिए।

मान लीजिए :

$$W = \{(x, y, z) \mid x + y - z = 0\} \subseteq \mathbf{R}^3$$

जाँच कीजिए कि सदिश $(3, 1, 2)$ और $(1, 1, 3)$

W के एक ही सहसमुच्चय में हैं या नहीं। 3

7. (क) मान लीजिए $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ \mathbf{R}^3 का क्रमित

आधार है, जहाँ $u_1 = (1, 1, 1)$, $u_2 = (1, 0, -1)$ और

$u_3 = (1, 1, 0)$ । B पर ग्राम-शिमट लांबिकीकरण

विधि का प्रयोग करके \mathbf{R}^3 का प्रसामान्य लांबिक

आधार प्राप्त कीजिए। 5

(ख) मान लीजिए $B = \{(1, 0, 1), (0, 1, -2), (-1, -1, 0)\}$

\mathbf{R}^3 का एक आधार है। B का द्वैत आधार

निकालिए। 5

(ग) जाँच कीजिए कि समुच्चय :

$$S = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_i \in \mathbf{R}, a_n \leq 0\}$$

\mathbf{R}^n का उपसमुच्चय है या नहीं। 3

(घ) यदि u_1, u_2 एवं u_3 \mathbf{C} पर एक सदिश समष्टि V में

रैखिकतः स्वतन्त्र सदिश हैं, तो दिखाइये कि

$u_1 + u_2, u_2 + u_3, u_3 + u_1$ भी रैखिकतः स्वतन्त्र हैं। 2

8. निम्नलिखित कथनों में से कौन-से कथन सत्य हैं और

कौन-से असत्य ? अपने उत्तर की पुष्टि एक लघु उपपत्ति या

प्रति-उदाहरण द्वारा कीजिए : 10

(क) एक सममित आव्यूह के आइगेन मान वास्तविक हैं।

(ख) यदि $S_1 \subset S_2$ एक सदिश समष्टि V के उपसमुच्चय

हैं और S_2 रैखिकतः स्वतन्त्र है, तो S_1 भी रैखिकतः

स्वतन्त्र है।

(ग) कोई भी रैखिक रूपान्तरण $T: \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^5$ के लिए

$$\text{Ker}(T) \neq \{0\} ।$$

(घ) कोई भी ऐकिक आव्यूह हर्मिटीय है।

(ङ) एक ऐसा रैखिक रूपांतरण $T: \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^4$ है जिसका

अभिलाक्षणिक बहुपद $(x-3)^2(x-5)(x-1)$ है

और न्यूनतम बहुपद $(x-3)(x-5)$ है।

× × × × ×