

**BACHELOR'S DEGREE  
PROGRAMME (BDP)  
Term-End Examination  
December, 2025**

**Elective Course : Mathematics**

**MTE-008 : DIFFERENTIAL EQUATIONS**

*Time : 2 Hours*

*Maximum Marks : 50*

---

**Note :** (i) *Question No. 1 is compulsory.*

(ii) *Answer any **four** questions from the remaining Question Nos. 2 to 7.*

(iii) *Use of calculators is not allowed.*

(iv) *Symbols have their usual meanings.*

---

---

1. State whether the following statements are True or False. Justify your answer with the help of a short proof or a counter-example :

10

- (i) The degree of the differential equation

$$y = x \frac{dy}{dx} + \frac{a}{\frac{dy}{dx}} \text{ is } 2.$$

(ii) The equation  $y = \frac{1}{x} (\log y + c)$  is a solution of the equation  $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{1-xy}$  for every value of the constant  $c$ .

(iii) The equation :

$$(y + zx) p - (x + yz) q = x^2 - y^2$$

is a quasi linear partial differential equation.

(iv) Partial differential equation :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

is parabolic in  $\mathbf{R}^2$ .

(v) The general solution of the equation

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} + y = 0 \text{ defined in } [-1, 1]$$

is given by :

$$y = c_1 e^x + c_2 x e^x$$

2. (a) Use the method of variation of parameters to solve the equation : 5

$$(D^2 - 2D + 1)y = \frac{e^x}{x^2 + 1}$$

- (b) Find the integral surface of the equation :

$$x(y^2 + z) p - y(x^2 + z) q = (x^2 - y^2) z$$

passing through the curve  $x + y = 0$ ,  
 $z = 1$ . 5

3. (a) Solve : 5

$$y \log y \frac{dx}{dy} + x - \log y = 0 .$$

- (b) Show that the equation  $a^2 u_{xx} = u_{tt}$  can be reduced to the form  $u_{\xi\eta} = 0$  by the change of variable  $\xi = x - at$ ,  $\eta = x + at$ .

5

4. (a) Solve the following simultaneous differential equations : 3

$$\frac{xdx}{z^2 - 2yz - y^2} = \frac{dy}{y+z} = \frac{dz}{y-z}$$

- (b) Solve the heat equation  $\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

subject to the following boundary and initial conditions : 7

(i)  $u(0, t) = 1$

(ii)  $u(1, t) = 3$

(iii)  $u(x, 0) = \sin \frac{\pi x}{1}$ ;  $0 < x < 1$

5. (a) Solve the following differential equation :

8

$$x \frac{dy}{dx} - y = (x-1) \left( \frac{d^2y}{dx^2} - x + 1 \right)$$

- (b) Eliminate the arbitrary function F from the following equations and obtain the P.D.E. :

2

$$Z = F(x^2 + y^2 + z^2, z^2 - 2xy) = 0$$

6. (a) Solve :

4

$$p^2y + 2px = y \quad \forall x, y \text{ and } p > 0$$

- (b) Solve :

6

$$\frac{d^3y}{dx^2} - \frac{4}{x} \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{5}{x^2} \frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x^3} = 1$$

7. (a) Find the complete integral of the partial differential equation :

5

$$xp^2 + yq^2 = z.$$

- (b) Find the complete solution of the following equation :

5

$$(D^2 - 4D + 4)y = x^2 + e^x + \cos 2x$$

**MTE-008**

स्नातक उपाधि कार्यक्रम (बी. डी. पी.)

सत्रांत परीक्षा

दिसम्बर, 2025

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित

एम.टी.ई.-008 : अवकल समीकरण

समय : 2 घण्टे

अधिकतम अंक : 50

नोट : (i) प्रश्न सं. 1 अनिवार्य है।

(ii) प्रश्न सं. 2 से 7 तक कोई चार प्रश्न हल कीजिए।

(iii) कैल्कुलेटर का प्रयोग करने की अनुमति नहीं है।

(iv) प्रतीकों के अपने सामान्य अर्थ हैं।

1. निम्नलिखित कथनों में से कौन-से कथन सत्य और असत्य हैं ? अपने उत्तर के पक्ष में संक्षिप्त उपपत्ति या प्रति उदाहरण दीजिए :

10

(i) अवकल समीकरण  $y = x \frac{dy}{dx} + \frac{a}{\frac{dy}{dx}}$  की कोटि

2 है।

(ii) अचर  $c$  के प्रत्येक मान के लिए समीकरण

$$y = \frac{1}{x} (\log y + c), \text{ समीकरण } \frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{1-xy} \text{ का}$$

एक हल है।

(iii) समीकरण  $(y + zx)p - (x + yz)q = x^2 - y^2$

एक अर्ध रैखिक आंशिक अवकल समीकरण है।

(iv) आंशिक अवकल समीकरण :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,$$

$\mathbf{R}^2$  में परवलयी है।

(v) समीकरण  $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} + y = 0, [-1, 1]$  में

सामान्य हल  $y = c_1 e^x + c_2 x e^x$ ।

2. (क) प्राचल विचरण विधि से निम्नलिखित समीकरण ज्ञात

कीजिए :

5

$$(D^2 - 2D + 1)y = \frac{e^x}{x^2 + 1}$$

(ख) निम्नलिखित समीकरण के लिए वक्र  $x + y = 0$ ,  
 $z = 1$  से गुजरने वाला समाकल समतल ज्ञात कीजिए :

5

$$x(y^2 + z)p - y(x^2 + z)q = (x^2 - y^2)z$$

3. (क) हल कीजिए :

5

$$y \log y \frac{dx}{dy} + x - \log y = 0$$

(ख) दर्शाइए कि चरों  $\xi = x - at$ ,  $\eta = x + at$  को बदलने पर समीकरण  $a^2 u_{xx} = u_{tt}$  को  $u_{\xi\eta} = 0$  के रूप में समानीत किया जा सकता है।

5

4. (क) निम्नलिखित युगपत अवकल समीकरण हल कीजिए :

3

$$\frac{xdx}{z^2 - 2yz - y^2} = \frac{dy}{y+z} = \frac{dz}{y-z}$$

(ख) निम्नलिखित परिबद्ध और आरंभिक प्रतिबंधों के लिए

$$\text{ऊष्मा समीकरण } \frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ हल कीजिए : } 7$$

$$(i) \quad u(0, t) = 1$$

$$(ii) \quad u(1, t) = 3$$

$$(iii) \quad u(x, 0) = \sin \frac{\pi x}{1}; \quad 0 < x < 1$$

5. (क) निम्नलिखित अवकल समीकरण हल कीजिए : 8

$$x \frac{dy}{dx} - y = (x-1) \left( \frac{d^2y}{dx^2} - x + 1 \right)$$

- (ख) निम्नलिखित समीकरण से ऐच्छिक फलन F लुप्त कीजिए और P.D.E. प्राप्त कीजिए : 2

$$Z = F(x^2 + y^2 + z^2, z^2 - 2xy) = 0$$

6. (क) हल कीजिए : 4

$$p^2y + 2px = y \quad \forall x, y \text{ तथा } p > 0.$$

- (ख) हल कीजिए : 6

$$\frac{d^3y}{dx^2} - \frac{4}{x} \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{5}{x^2} \frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x^3} = 1$$

7. (क) आंशिक अवकल समीकरण  $xp^2 + yq^2 = z$  का पूर्ण समाकल ज्ञात कीजिए। 5

- (ख) निम्नलिखित समीकरण का पूर्ण हल ज्ञात कीजिए : 5

$$(D^2 - 4D + 4)y = x^2 + e^x + \cos 2x$$

× × × × ×