No. of Printed Pages : 12 **MTE–02**

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)

Term-End Examination

December, 2025

MTE-02 : LINEAR ALGEBRA

Time : 2 Hours *Maximum Marks : 50*

Note : *There are seven questions in this paper. Question No.* ***7*** *is compulsory. Do any* ***four*** *questions from Q. Nos. 1 to 6. Use of calculator is not allowed.*

---

1. (a) Show that the eigen values of a self-adjoint operator are real. 2

(b) For the linear operator $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ defined by :

$$T(x, y, z) = (x - y + 2z, 2x + y, -x - 2y + 2z)$$

find range of T and kernel of T. 5

(c) Let the characteristic polynomial of a matrix A be $x^3 - 5x^2 + 2x + 1$. Is the matrix invertible ? If yes, then express A^{-1} as a linear combination of A^2, A and I. If no, then justify your answer. 3

2. (a) For the basis $B = \{(1, 0, -1), (1, 1, 1), (2, 2, 0)\}$ of $\mathbf{R}^3$, find the dual basis of B. 4

(b) Find all the eigen values, their corresponding eigen vectors and dimensions of the eigen spaces for the matrix : 6

$$A = \begin{bmatrix} -9 & 4 & 4 \\ -8 & 3 & 4 \\ -16 & 8 & 7 \end{bmatrix}$$

3. (a) Check whether the vector $(1, 3, 4)$ is in the linear span of vectors $(1, 0, -1), (0, 1, 1)$ and $(1, 1, 1)$. 2

(b) Reduce the quadratic form $3x^2 + 2xy + 3y^2$ to a normal canonical form, giving the corresponding coordinate transformations. 6

(c) State the Cauchy-Schwarz inequality. Verify the inequality for the vectors $(1, 0, -1, 1)$ and $(1, 1, 0, 1)$ in $\mathbf{R}^4$. 2

4. (a) For $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, find A^{-1} by using row-reduction method. 4

(b) Define the following and give an example : 4

(i) Norm of a vector in an inner product space

(ii) Symmetric matrix

(c) Define the signature of a quadratic form. Find the signature of the quadratic form $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2$. 2

5. (a) Check whether the set :

$$S = \left\{ (a_1, a_2, ..., a_n) \in \mathbf{R}^n \mid a_i \geq 0 \right\}$$

is a subspace of $\mathbf{R}^n$ or not. 3

(b) Check whether the following system of equations can be solved, using Cramer's rule : 5

$$x + y + z = 3$$

$$2x - y + z = 1$$

$$x + 2y + 2z = 4$$

If yes, apply Cramer's rule to solve the system of equations. If no, use Gaussian elimination to solve the system of equations.

(c) If v_1, v_2 and v_3 are linearly independent vectors in a vector space over $\mathbf{C}$, show that $v_1 + v_2, v_2 + v_3$ and $v_1 + v_3$ are also linearly independent over $\mathbf{C}$. 2

6. (a) Show that the set of all 3×3 upper triangular matrices with entries from $\mathbf{R}$ is a vector space over $\mathbf{R}$ under usual addition and scalar multiplication of matrices. The a basis for the vector space. 8

(b) Show that $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & b \end{vmatrix} = 0$ for infinitely many values of a and b. 2

7. Which of the following statements are true and which are false ? Justify your answers with a short proof or a counter-example, whichever is appropriate : 2×5=10

(i) If a matrix is diagonalisable all its eigen values are distinct.

(ii) If V is a vector space of dimension 7 and U and W are two subspaces of V such that $\dim(\mathrm{U}) = 2, \dim(\mathrm{W}) = 6$ and $\dim(\mathrm{U} \cap \mathrm{W}) = 1$, then $\mathrm{V} = \mathrm{U} \oplus \mathrm{W}$.

(iii) Diagonal elements of a Hermitian matrix are always real.

(iv) If $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ is a subjective linear operator, then $\ker(T) \neq \{0\}$.

(v) If T_1 and T_2 are invertible linear transformations from $\mathbf{R}^2$ to $\mathbf{R}^2$, then $T_1 + T_2$ is also an invertible linear transformation.

MTE–02

स्नातक उपाधि कार्यक्रम (बी. डी. पी.)

सत्रांत परीक्षा

दिसम्बर, 2025

एम.टी.ई.–02 : रैखिक बीजगणित

समय : 2 घण्टे अधिकतम अंक : 50

नोट : *इस प्रश्न–पत्र में सात प्रश्न हैं। प्रश्न संख्या 7 अनिवार्य है। प्रश्न संख्या 1 से 6 तक कोई* ***चार*** *प्रश्न कीजिए। कैल्कुलेटर का प्रयोग नहीं करना है।*

---

1. (क) दिखाइए कि एक स्वसंलग्न संकारक के आइगेन मान वास्तविक होते हैं। 2

(ख) रैखिक संकारक $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ के लिए, जो :

$$T(x, y, z) = (x - y + 2z, 2x + y, -x - 2y + 2z)$$

द्वारा परिभाषित है, T के परिसर और T की अष्टि ज्ञात कीजिए। 5

(ग) मान लीजिए आव्यूह A का अभिलाक्षणिक बहुपद $x^3 - 5x^2 + 2x + 1$ है। क्या आव्यूह व्युत्क्रमणीय है ? यदि हाँ, तो A^{-1} को A^2, A और I के एकघात संचय के रूप में व्यक्त कीजिए। यदि नहीं, तो अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। 3

2. (क) $\mathbf{R}^3$ के आधार $B = \{(1, 0, -1), (1, 1, 1), (2, 2, 0)\}$

B का द्वैत आधार ज्ञात कीजिए। 4

(ख) आव्यूह $A = \begin{bmatrix} -9 & 4 & 4 \\ -8 & 3 & 4 \\ -16 & 8 & 7 \end{bmatrix}$ के आइगेन मान, उनके संगत आइगेन सदिश और आइगेन समष्टियों की विमा ज्ञात कीजिए। 6

3. (क) जाँच कीजिए कि सदिश $(1, 3, 4)$ सदिश $(1, 0, -1), (0, 1, 1)$ और $(1, 1, 1)$ की रैखिक विस्तृति में है या नहीं। 2

(ख) निर्देशांक रूपान्तरणों को बताते हुए द्विघाती समघात $3x^2 + 2xy + 3y^2$ को प्रसामान्य विहित समघात में समानीत कीजिए। 6

(ग) कौशी–श्वार्ज असमिका को बताइए। $\mathbf{R}^4$ में सदिश $(1, 0, -1, 1)$ और $(1, 1, 0, 1)$ के लिए असमिका को सत्यापित कीजिए। 2

4. (क) आव्यूह $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ के लिए पंक्ति-समानयन विधि द्वारा A^{-1} ज्ञात कीजिए। 4

(ख) निम्नलिखित को परिभाषित कीजिए और एक उदाहरण दीजिए : 4

(i) एक आन्तर गुणन समष्टि में एक सदिश का मानक

(ii) सममित आव्यूह

(ग) एक द्विघाती समघात का चिह्नक परिभाषित कीजिए। द्विघात समघात $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2$ का चिह्नक ज्ञात कीजिए। 2

5. (क) जाँच कीजिए कि समुच्चय :

$$S = \left\{(a_1, a_2, ..., a_n) \in \mathbf{R}^n \mid a_i \geq 0\right\}$$

$\mathbf{R}^n$ का उपसमष्टि है या नहीं। 3

(ख) जाँच कीजिए कि निम्नलिखित समीकरण निकाय को क्रेमर विधि से हल किया जा सकता है या नहीं : 5

$$x + y + z = 3$$

$$2x - y + z = 1$$

$$x + 2y + 2z = 4$$

यदि 'हाँ' तो समीकरण निकाय को क्रेमर विधि से हल कीजिए। यदि 'नहीं' तो समीकरण निकाय को गॉस की विलोपन विधि से हल कीजिए।

(ग) यदि v_1, v_2 और v_3 $\mathbf{C}$ पर एक सदिश समष्टि में रैखिकतः स्वतन्त्र हैं, तो दिखाइए $v_1 + v_2, v_2 + v_3$ और $v_1 + v_3$ भी $\mathbf{C}$ पर रैखिकतः स्वतन्त्र हैं। 2

6. (क) दिखाइए कि **R** से प्रविष्टि वाले 3×3 उपरि त्रिभुजीय आव्यूहों का समुच्चय साधारण आव्यूह जोड़ और गुणन के सापेक्ष **R** पर एक सदिश समष्टि है। सदिश समष्टि के लिए आधार ज्ञात कीजिए। 8

(ख) दिखाइए कि a और b के अनन्ततः कई मानों के लिए : 2

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & b \end{vmatrix} = 0$$

7. निम्नलिखित कथनों में से कौन–से कथन सत्य और कौन–से कथन असत्य हैं ? अपने उत्तर की पुष्टि एक लघु उपपत्ति या प्रति–उदाहरण द्वारा दीजिए, जो भी उचित है : 2×5=10

(i) यदि एक आव्यूह विकर्णनीय है, तो उसके आइगेमान भिन्न हैं।

(ii) यदि V विमा 7 वाला एक सदिश समष्टि है और U और W समष्टि V की उपसमष्टियाँ हैं जिनके लिए $\dim(\mathrm{U}) = 2, \dim(\mathrm{W}) = 6$ और $\dim(\mathrm{U} \cap \mathrm{W}) = 1$, तब $\mathrm{V} = \mathrm{U} \oplus \mathrm{W}$ ।

(iii) एक हर्मिशियन आव्यूह के विकर्ण अवयव हमेशा वास्तविक होते हैं।

(iv) यदि $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ एक आच्छादिक रैखिक संकारक है, तो $\ker(T) \neq \{0\}$ ।

(v) यदि T_1 एवं T_2, $\mathbf{R}^2$ से $\mathbf{R}^2$ तक व्युत्क्रमणीय रैखिक रूपान्तरण हैं, तो $T_1 + T_2$ भी व्युत्क्रमणीय रैखिक रूपान्तरण है।

× × × × ×