

**BACHELOR'S DEGREE  
PROGRAMME  
(BDP)**

**Term-End Examination  
December, 2025**

**MTE-06 : ABSTRACT ALGEBRA**

*Time : 2 Hours*

*Maximum Marks : 50*

- 
- Note :** (i) Answer **five** questions in all.  
(ii) Question No. 7 is compulsory.  
(iii) Do any **four** questions from Q. Nos. 1 to 6.  
(iv) Use of calculator is not allowed.
- 
- 

1. (a) Define the Euler  $\phi$ -function. Further, find  $\phi(18)$  and  ${}_{17}\phi^{(18)} \pmod{18}$ . 3  
(b) List all the generators of the group  $Z_{15}$ . Justify your list. 2

- (c) Find all the Sylow subgroups of a group of order 35. Is this group cyclic ? Justify your answer. 5
2. (a) Let  $G$  be the set of all real numbers except  $-1$ . Define an operation  $*$  on  $G$  by  $a * b = ab + a + b$  for all  $a, b \in G$ . Check whether or not  $G$  is an abelian group. 4
- (b) Let  $R$  be a ring such that  $r^2 = r$  for all  $r \in R$ . Show that  $R$  is commutative. Also find the characteristic of  $R$ . 3
- (c) Give an example, with justification, of a ring  $R$  which is not an integral domain, but for which every ideal is principal. 3
3. (a) If  $N$  is a subgroup of index 2 in a group  $G$ , then show that  $N$  is normal subgroup in  $G$ . 3
- (b) Let  $f : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$  be defined by  $f(x) = x^2 - 2$ . Find  $f^{-1}(\{0, 1, 2\})$ . 2

- (c) Check whether or not :

$$\frac{\mathbb{Q}[x]}{\langle x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \rangle}$$

is a field. 5

4. (a) Express the permutation :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 8 & 9 & 2 & 3 & 1 & 7 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

as a product of disjoint cycles. Is  $\sigma$  even? Give reasons for your answer. 3

- (b) State the Fundamental Theorem of Homomorphism for rings. Further, apply it to prove that  $\mathbb{Z}^5 / \mathbb{Z}^2 \simeq \mathbb{Z}^3$ . 7

5. (a) Give an examples, with justification, to show that if  $N$  is a normal subgroup of a group  $G$ , then the centre of  $N$  may not be contained in the centre of  $G$ . 3

- (b) In a Euclidean domain  $R$ , show that for any non-zero  $r \in R$ ,  $d(1) \leq d(r)$ , where  $d$  is a Euclidean valuation. 2

- (c) Give an example, with justification, of a ring with identity that has a subring not containing identity. 2
- (d) Use the principle of mathematical induction to prove that  $n^2 \leq 2^n$  for all  $n \in \mathbf{N}$ ,  $n > 3$ . 3
6. (a) Describe all subgroups of  $(\mathbf{Z}, +)$  which contain  $5\mathbf{Z}$  and  $7\mathbf{Z}$ . 2
- (b) Let  $T$  be the set of straight lines in a plane. Define a relation on  $T$  by  $L_1 R L_2$  iff  $L_1$  is perpendicular to  $L_2$ . Is the relation reflexive ? Is it symmetric ? Is it transitive ? Justify your answers. 3
- (c) Let :

$$R = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbf{Z} \text{ s. t. } b = 2^m \cdot 3^n, m, n \in \mathbf{Z} \right. \\ \left. m, n \geq 0 \right\}$$

Show that  $R$  is a ring with respect to the usual addition and multiplication of rational numbers. Is  $R$  commutative ? Does  $R$  have an identity element ? Justify your answers. 5

7. Which of the following statements are true and which are false ? Give reason for your answers. (Marks with only be given for proper justification) : 10

- (i) In the Klein 4-group, every element has order 2.
- (ii)  $\mathbf{Z}_{18}$  and  $\mathbf{Z}_3 \times \mathbf{Z}_6$  are isomorphic groups.
- (iii)  $\mathbf{Z}_8$  has no non-zero nilpotent elements.
- (iv) In a ring with identity, a unit cannot be a zero divisor.
- (v)  $\mathbf{Z}_p^2$  is a field, where  $p$  is a prime.

**MTE-06**

स्नातक उपाधि कार्यक्रम

(बी. डी. पी.)

सत्रांत परीक्षा

दिसम्बर, 2025

एम.टी.ई.-06 : अमूर्त बीजगणित

समय : 2 घण्टे

अधिकतम अंक : 50

- 
- नोट : (i) कुल पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए।  
(ii) प्रश्न संख्या 7 करना अनिवार्य है।  
(iii) प्रश्न सं. 1 से 6 तक किन्हीं चार प्रश्नों के उत्तर दीजिए।  
(iv) कैल्कुलेटर का प्रयोग करने की अनुमति नहीं है।
- 

1. (क) ऑयलर  $\phi$ -फलन को परिभाषित कीजिए। आगे,  
 $\phi(18)$  और  ${}_{17}\phi^{(18)} \pmod{18}$  निकालिए। 3
- (ख) समूह  $Z_{15}$  के सभी जनक अवयवों को सूचित कीजिए। अपनी सूची की पुष्टि कीजिए। 2
- (ग) कोटि 35 वाले एक समूह के सभी सीलो उपसमूह निकालिए। क्या यह समूह चक्रीय है ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। 5

2. (क) मान लीजिए कि  $G - 1$  छोड़कर सभी वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है।  $G$  पर संक्रिया  $*$  सभी  $a, b \in G$  के लिए  $a * b = ab + a + b$  द्वारा परिभाषित कीजिए। जाँच कीजिए कि  $G$  एक आबेली समूह है या नहीं। 4

(ख) मान लीजिए वलय  $R$  में सभी  $r \in R$  के लिए  $r^2 = r$ । दिखाइए कि  $R$  क्रमविनिमेय है।  $R$  का अभिलाक्षणिक भी ज्ञात कीजिए। 3

(ग) पुष्टि के साथ एक वलय  $R$  का उदाहरण दीजिए जो पूर्णांकीय प्रान्त नहीं है परन्तु उसकी प्रत्येक गुणजावली मुख्य है। 3

3. (क) यदि समूह  $G$  में  $N$  एक सूचकांक 2 वाला एक उपसमूह है, तो दर्शाइए कि  $G$  में  $N$  प्रसामान्य उपसमूह हैं। 3

(ख) मान लीजिए  $f : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$   $f(x) = x^2 - 2$  द्वारा परिभाषित है।  $f^{-1}(\{0, 1, 2\})$  निकालिए। 2

(ग) जाँच कीजिए कि : 5

$$\frac{\mathbf{Q}[x]}{\langle x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \rangle}$$

एक क्षेत्र है या नहीं।

4. (क) क्रमचय :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 8 & 9 & 2 & 3 & 1 & 7 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

को असंयुक्त चक्रों की गुणनफल के रूप में लिखिए।

क्या यह  $\sigma$  सम है ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। 3

(ख) वलयों के लिए समाकारिता का मूल प्रमेय लिखिए।

आगे, उसको प्रयोग करके सिद्ध कीजिए कि

$$\mathbf{Z}^5 / \mathbf{Z}^2 \simeq \mathbf{Z}^3 \quad 7$$

5. (क) यह दिखाने के लिए, पुष्टि के साथ उदाहरण दीजिए

कि यदि  $N$  समूह  $G$  का प्रसामान्य उपसमूह है तो  $N$

का केन्द्र  $G$  के केन्द्र में आविष्ट नहीं हो सकता है। 3

(ख) दिखाइए कि एक यूक्लिडीय प्रान्त  $R$  में किसी भी

शून्येतर  $r \in R$  के लिए,  $d(1) \leq d(r)$ , जहाँ  $d$  एक

यूक्लिडीय मानांकन है। 2

(ग) पुष्टि के साथ एक तत्समकी वलय का उदाहरण

दीजिए जिसके एक उपवलय में तत्समक अवयव नहीं

है। 2

(घ) गणितीय आगमन विधि द्वारा सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक

$$n \in \mathbf{N}, n > 3 \text{ के लिए } n^2 \leq 2^n \quad 3$$

6. (क)  $(\mathbf{Z}, +)$  के सभी उपसमूहों का वर्णन कीजिए जो  $5\mathbf{Z}$  और  $7\mathbf{Z}$  को आविष्ट करते हैं। 2

(ख) समतल में सरल रेखाओं का समुच्चय  $T$  लीजिए।  $T$  पर संबंध,  $L_1RL_2$  यदि और केवल यदि  $L_1, L_2$  पर लम्बवत् है, द्वारा परिभाषित कीजिए। क्या यह सम्बन्ध स्वतुल्य है ? क्या यह सम्बन्ध सममित है ? क्या यह संबंध संक्रामक है ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। 3

(ग) मान लीजिए :

$$R = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbf{Z} \text{ s. t. } b = 2^m \cdot 3^n, m, n \in \mathbf{Z} \right. \\ \left. m, n \geq 0 \right\}$$

दिखाइए कि परिमेय संख्याओं के साधारण जोड़ एवं गुणन के सापेक्ष  $R$  एक वलय है। क्या  $R$  क्रम-विनिमेय है ? क्या  $R$  में तत्समक अवयव है ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। 5

7. निम्नलिखित कथनों में से कौन-से कथन सत्य और कौन-से असत्य हैं ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। (उचित पुष्टिकरण देने से ही अंक दिए जाएँगे) :

10

(i) क्लाइन 4-समूह में प्रत्येक अवयव की कोटि 2 होती है।

(ii)  $Z_{18}$  और  $Z_3 \times Z_6$  तुल्याकारी समूह हैं।

(iii)  $Z_8$  में कोई भी शून्येतर शून्य भावी अवयव नहीं है।

(iv) एक तत्समकी वलय में कोई भी मात्रक शून्य का भाजक हो नहीं सकता।

(v)  $Z_p^2$  एक क्षेत्र है, जहाँ  $p$  एक अभाज्य संख्या है।

× × × × ×