

**BACHELOR'S DEGREE
PROGRAMME (BDP)
Term-End Examination
December, 2025**

MTE-07 : ADVANCED CALCULUS

Time : 2 Hours

Maximum Marks : 50

Note : (i) *Question No. 1 is compulsory.*

(ii) *Attempt any **four** questions out of the remaining Q. Nos. 2 to 7.*

(iii) *Use of calculator is not allowed.*

1. State whether the following statements are True or False. Give a short proof or a counter-example in support of your answer :

$$5 \times 2 = 10$$

- (a) $e_1 + 2e_3$ represents the point $(1, 2, 0)$, where $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ and $e_3 = (0, 0, 1)$.

(b) If $z = \tan^{-1} \frac{y^2}{x^2}$, $x \neq 0$, then

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

(c) $(0, 0)$ is a point of maxima for the function $f(x, y) = xy$.

(d) The function $f(x, y, z) = e^{x+y+z}$ is integrable over $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$.

(e) $f_{xy}(1, 0) \neq f_{yx}(0, 1)$ for the function

$f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ defined by

$$f(x, y) = \sin(e^x + e^y).$$

2. (a) Show that the perimeter of triangle joining the points $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ and $(0, 0, 1)$ is $3\sqrt{2}$. 3

(b) Let $W(u, v) = 7uv^2$, where

$u(x, y) = 2x + y$ and $v(x, y) = 5xy$. Find

$\frac{\partial W}{\partial y}$ using chain rule. 3

(c) Calculate the double integral of the function $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ defined by $f(x, y) = 5x + 7y$ over the region defined by $x = 1$, $y = 4$ and $y = 2x$. 4

3. (a) Find the Taylor polynomial $T_3(x)$ for e^{x+y} at $(0, 0)$. 4

(b) Evaluate : 2

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{e^x - 1}}$$

(c) Evaluate f_{xy} at a point (x, y) for the function f defined by $f(x, y) = x^5 + 10x^3y^3 + 8y^4$. Using Schwarz's Theorem obtain f_{yx} at the point (x, y) . 4

4. (a) Show that the map : 3

$$F(x, y) = (2x - 3y, 5x + 7y)$$

is locally invertible on the whole of \mathbf{R}^2 .

- (b) Find the centre of gravity of a thin plate of density 5, bounded by $y = x^2$ and $y = 2x$ in the first quadrant. 5

- (c) Check whether the set

$$\left\{ x + \frac{1}{x} \mid 0 < x < 1 \right\}$$

is bounded. 2

5. (a) Find the two repeated limits of the function :

$$f(x, y) = \frac{y-x}{y+x} \times \frac{1+x^2}{1+y^2} \text{ at } (0, 0).$$

Does the simultaneous limit f exist as $(x, y) \rightarrow (0, 0)$? Justify your answer. 3

- (b) Examine the function $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ defined by $f(x, y) = y^4 + xy^2 + x^2$ for local extreme values. 5

- (c) If $f(x, y, z) = x + y + z$ and $g(x) = 2x$, find $f \circ g$ or $g \circ f$, whichever exists. 2

6. (a) Evaluate $\int_0^9 \int_{\sqrt{y}}^3 \sin(\pi x^3) dx dy$, by reversing the order of integration. Draw a sketch of the region of integration. 5

- (b) Check whether the function $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ defined by :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{5x^2y}{x^3 + 7y^2}; & (x, y) \neq (0, 0) \\ 3 & ; (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

is continuous at $(0, 0)$. 3

- (c) Show that the limit of the function :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & , x > 0 \\ 3x + 2, & x \leq 0 \end{cases}$$

does not exist as $x \rightarrow 0$. 2

7. (a) State Inverse Function Theorem for the functions of two variables. Show that :

$$F(x, y) = (x^3y + 7, 2x^2 + 3y)$$

is locally invertible at the point $(1, 1)$. 4

- (b) Show that the function $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ defined by $f(x, y) = 2 \sinh x + 3 \cosh y$ is continuously differentiable everywhere.

3

- (c) Find the domain, the range and the level surfaces of the function :

3

$$f(x, y, z) = \sqrt{9 - x^2 - y^2 - z^2}$$

MTE-07

स्नातक उपाधि कार्यक्रम

(बी. डी. पी.)

सत्रांत परीक्षा

दिसम्बर, 2025

एम.टी.ई.-07 : उच्च कलन

समय : 2 घण्टे

अधिकतम अंक : 50

नोट : (i) प्रश्न संख्या 1 अनिवार्य है।

(ii) प्रश्न संख्या 2 से 7 तक किन्हीं चार प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

(iii) कैल्कुलेटर का प्रयोग करने की अनुमति नहीं है।

1. बताइए कि निम्नलिखित कथन सत्य हैं या असत्य। अपने उत्तर के पक्ष में लघु उपपत्ति या प्रति-उदाहरण दीजिए :

$$5 \times 2 = 10$$

(क) जब $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ और

$e_3 = (0, 0, 1)$ है, तो $e_1 + 2e_3$ बिन्दु $(1, 2, 0)$ को

निरूपित करता है।

(ख) यदि $z = \tan^{-1} \frac{y^2}{x^2}$, तब $x \neq 0$ के लिए

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

(ग) फलन $f(x, y) = xy$, $(0, 0)$ एक उच्चिष्ठ बिन्दु है।

(घ) फलन $f(x, y, z) = e^{x+y+z}$, $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$ पर समाकलनीय है।

(ङ) $f(x, y) = \sin(e^x + e^y)$ द्वारा परिभाषित फलन के लिए $f_{xy}(1, 0) \neq f_{yx}(0, 1)$ ।

2. (क) बिन्दु $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ और $(0, 0, 1)$ को मिलाने वाले त्रिभुज का परिमाण $3\sqrt{2}$ है। 3

(ख) मान लीजिए कि $W(u, v) = 7uv^2$ जहाँ $u(x, y) = 2x + y$ और $v(x, y) = 5xy$ शृंखला

नियम लागू करके $\frac{\partial W}{\partial y}$ ज्ञात कीजिए। 3

(ग) $x = 1$, $y = 4$ और $y = 2x$ से बने प्रदेश पर

$f(x, y) = 5x + 7y$ द्वारा परिभाषित फलन

$f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ का द्विक-समाकल प्राप्त कीजिए। 4

3. (क) बिन्दु $(0, 0)$ पर e^{x+y} का टेलर-बहुपद $T_3(x)$

ज्ञात कीजिए। 4

(ख) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{e^x - 1}}$ का मूल्यांकन कीजिए। 2

(ग) $f(x, y) = x^5 + 10x^3y^3 + 8y^4$ द्वारा परिभाषित

फलन f के लिए किसी बिन्दु (x, y) पर f_{xy} ज्ञात

कीजिए। श्वार्ज प्रमेय का प्रयोग करके बिन्दु (x, y)

पर f_{yx} का मान ज्ञात कीजिए। 4

4. (क) दिखाइए कि \mathbf{R}^2 के सभी बिन्दु (x, y) पर फलन

$F(x, y) = (2x - 3y, 5x + 7y)$ स्थानिकतः

व्युत्क्रमणीय है। 3

(ख) प्रथम चतुर्थांश में, $y = x^2$ और $y = 2x$ से परिबद्ध एक पतले प्लेट का गुरुत्व केन्द्र ज्ञात कीजिए जिसका घनत्व 5 है। 5

(ग) जाँच कीजिए कि समुच्चय

$$S = \left\{ x + \frac{1}{x} \mid 0 < x < 1 \right\} \text{ परिबद्ध है।} \quad 2$$

5. (क) निम्नलिखित फलन f की बिन्दु $(0, 0)$ पर दो पुनरावृत्त सीमाएँ ज्ञात कीजिए : 3

$$f(x, y) = \frac{y-x}{y+x} \times \frac{1+x^2}{1+y^2}$$

क्या $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ होने पर $f(x, y)$ की युगपद सीमा का अस्तित्व है ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।

(ख) फलन f के स्थानिकतः चरम मानों के लिए

$$f(x, y) = y^4 + xy^2 + x^2, \text{ परीक्षण कीजिए।} \quad 5$$

(ग) फलनों $f(x, y, z) = x + y + z$ और $g(x) = 2x$,
के लिए $f \circ g$ और $g \circ f$ निकालिए, यदि अस्तित्व
है। 2

6. (क) निम्नलिखित समाकल को चर-परिवर्तन करके
परिकलित कीजिए :

$$\int_0^9 \int_{\sqrt{y}}^3 \sin(\pi x^3) dx dy$$

रूपांतरित प्रदेश का स्थूल चित्र बनाइए। 5

(ख) जाँच कीजिए निम्नलिखित फलन $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$,
बिन्दु $(0, 0)$ पर संतत है : 3

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{5x^2y}{x^3 + 7y^2} ; & (x, y) \neq (0, 0) \\ 3 & ; (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(ग) दिखाइए कि $x \rightarrow 0$ होने पर निम्नलिखित सीमा का
अस्तित्व होता है : 2

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} , & x > 0 \\ 3x + 2, & x \leq 0 \end{cases}$$

7. (क) दो चरों वाले फलनों के लिए प्रतिलोम फलन प्रमेय का कथन दीजिए।

दिखाइए कि निम्नलिखित फलन बिन्दु (1, 1) पर स्थानिकतः व्युत्क्रमणीय है : 4

$$F(x, y) = (x^3y + 7, 2x^2 + 3y)$$

- (ख) मान लीजिए $f(x, y) = 2 \sinh x + 3 \cosh y$ द्वारा दिया गया फलन $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$, सर्वत्र संतततः अवकलनीय है। 3

- (ग) फलन $f(x, y, z) = \sqrt{9 - x^2 - y^2 - z^2}$ का प्रांत, परिसर और स्तरपृष्ठ ज्ञात कीजिए। 3

× × × × ×