

**BACHELOR'S DEGREE
PROGRAMME (BDP)
Term-End Examination
December, 2025
(Elective Course : Mathematics)
MTE-09 : REAL ANALYSIS**

Time : 2 Hours

Maximum Marks : 50

Weightage : 70%

Note : Attempt *five* questions in all. Q. No. 7 is compulsory. Answer any *four* questions from question nos. 1 to 6. Use of calculator is not allowed.

1. (a) Draw the graph of the function f ,
defined by : 3

$$f(x) = |x - 2| + [3x], \quad x \in [1, 3].$$

- (b) Let f be a function defined by :

$$f(x) = \frac{1}{x+1}, \quad x \in [1, 10]$$

Check, whether or not, f is uniformly
continuous on the interval $[1, 10]$. 3

(c) Let $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ be defined by

$$f(x) = x^2 - 2. \quad \text{Let } P_1 = \left\{ 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1 \right\}$$

and $P_2 = \left\{ 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1 \right\}$ be two partitions

of the interval $[0, 1]$. Find $L(P_1, f)$ and

$$U(P_2, f). \quad 4$$

2. (a) Find whether or not the following sequence is convergent : 3

$$\left(\frac{3n + 4n^2}{5n^2 - n} \right)$$

(b) Represent the number $2 + \sqrt{5}$ on the real plane. 3

(c) Evaluate : 4

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{r=1}^{5n} \frac{2n}{(3n+r)^2}$$

3. (a) Test the convergence of the series : 3

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \dots$$

- (b) Evaluate the following limit, if it exists : 3

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{\tan^2 x + \tan x - x}$$

- (c) Prove that every infinite set contains a denumerable set. 4
4. (a) Examine the continuity of the function $f : [2, 5] \rightarrow \mathbf{R}$ defined by $f(x) = \frac{[x] - 1}{4x - 3}$, where $[x]$ denotes the greatest integer $\leq x$. 5

- (b) Show that $R_n(x)$, the Lagrange's form of remainder in the Maclaurin's series expansion of $\cos 3x$, tends to zero as $n \rightarrow \infty$. Hence obtain the Maclaurin's infinite expansion of $\cos 3x$. 5

5. (a) Examine the following series for convergence : 3

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{3n-2} \right)^n$$

(b) Prove that every strictly increasing onto function is invertible. 3

(c) Examine the function :

$$f(x) = (x + 2)^2(x - 5)^3$$

for extreme values. 4

6. (a) Prove that a non-empty subset of \mathbf{R} is closed if its complement is open. 3

(b) Show that the equation :

$$2x^3 - 3x^2 + x - 4 = 0$$

has a real root in the interval $[1, 2]$. 3

(c) Prove that the function f defined by :

$$f(x) = \begin{cases} 2, & \text{if } x \text{ is rational} \\ -2, & \text{if } x \text{ is irrational} \end{cases}$$

is discontinuous at each real number, using sequential definition of the continuity. 4

7. Which of the following statements are true ?
Give reasons for your answers : 10

(a) Every bounded sequence is divergent.

- (b) The set \mathbf{Q} of rational numbers is an open subset of \mathbf{R} .
- (c) The function $f(x) = 3x^2 + |x + 3|$ is differentiable at $x = -2$.
- (d) The function f given by :

$$f(x) = \begin{cases} e^{2x} + e^{-2x}, & x \neq 0 \\ 3, & 0 \end{cases}$$

is continuous at $x = 0$.

- (e) The necessary condition for a function f to be integrable is that it is continuous.

MTE-09

स्नातक उपाधि कार्यक्रम (बी. डी. पी.)

सत्रांत परीक्षा

दिसम्बर, 2025

(ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित)

एम.टी.ई.-09 : वास्तविक विश्लेषण

समय : 2 घण्टे

अधिकतम अंक : 50

भारिता : 70%

नोट : कुल पाँच प्रश्न कीजिए। प्रश्न संख्या 7 अनिवार्य है। प्रश्न संख्या 1 से 6 तक से कोई चार प्रश्न कीजिए। कैल्कुलेटर के उपयोग की अनुमति नहीं है।

1. (क) $f(x) = |x - 2| + [3x]$, $x \in [1, 3]$ द्वारा परिभाषित फलन f का आलेख खींचिए। 3

(ख) मान लीजिए f कोई फलन है जो

$f(x) = \frac{1}{x+1}$, $x \in [1, 10]$ द्वारा परिभाषित है।

जाँच कीजिए कि क्या यह फलन f अंतराल $[1, 10]$

पर एकसमानतः संतत है या नहीं। 3

(ग) मान लीजिए कि $f(x) = x^2 - 2$ द्वारा परिभाषित

$f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ एक फलन है। यह भी मान लीजिए

कि $P_1 = \left\{ 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1 \right\}$ और

$P_2 = \left\{ 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1 \right\}$ अंतराल $[0, 1]$ के दो विभाजन

हैं। $L(P_1, f)$ और $U(P_2, f)$ ज्ञात कीजिए। 4

2. (क) ज्ञात कीजिए कि अनुक्रम $\left(\frac{3n + 4n^2}{5n^2 - n} \right)$ अभिसारी है

या नहीं। 3

(ख) संख्या $2 + \sqrt{5}$ को वास्तविक समतल पर निरूपित

कीजिए। 3

(ग) मान निकालिए : 4

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{r=1}^{5n} \frac{2n}{(3n+r)^2}$$

3. (क) श्रेणी : 3

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \dots$$

की अभिसारिता की जाँच कीजिए।

(ख) निम्नलिखित सीमा का मान निकालिए, यदि उसका अस्तित्व है : 3

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{\tan^3 x + \tan x - x}$$

(ग) सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक अपरिमित समुच्चय में एक प्रगणनीय समुच्चय अंतर्विष्ट होता है। 4

4. (क) $f(x) = \frac{[x]-1}{4x-3}$ द्वारा परिभाषित फलन

$f: [2, 5] \rightarrow \mathbf{R}$ के सांतत्य की जाँच कीजिए, जहाँ $[x]$ अधिकतम पूर्णांक $\leq x$ को व्यक्त करता है। 5

(ख) दर्शाइए कि $\cos 3x$ के मैक्लॉरिन श्रेणी प्रसार में, शेषफल का लैग्रान्ज रूप $R_n(x)$ शून्य की ओर प्रवृत्त होता है, जब $n \rightarrow \infty$ है। इससे $\cos 3x$ का मैक्लॉरिन अपरिमित प्रसार प्राप्त कीजिए। 5

5. (क) श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{3n-2} \right)^n$ की अभिसारिता के लिए जाँच कीजिए। 3

(ख) सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक निरंतर आच्छादक फलन व्युत्क्रमणीय होता है। 3

(ग) फलन $f(x) = (x+2)^2(x-5)^3$ की चरम मानों के लिए जाँच कीजिए। 4

6. (क) सिद्ध कीजिए कि \mathbf{R} का एक अरिक्त उपसमुच्चय संवृत होता है, यदि उसका पूरक विवृत होता है। 3

(ख) दर्शाइए कि समीकरण $2x^3 - 3x^2 + x - 4 = 0$ का अंतराल $[1, 2]$ में एक वास्तविक मूल है। 3

(ग) सांतत्य की अनुक्रमिक परिभाषा का उपयोग करते हुए सिद्ध कीजिए कि :

$$f(x) = \begin{cases} 2, & \text{यदि } x \text{ परिमेय है} \\ -2, & \text{यदि } x \text{ अपरिमेय है} \end{cases}$$

द्वारा परिभाषित फलन f प्रत्येक वास्तविक संख्या पर असंतत है। 4

7. निम्नलिखित में से कौन-से कथन सत्य हैं ? अपने उत्तरों के लिए कारण दीजिए : 10

(क) प्रत्येक परिबद्ध अनुक्रम अपसारी होता है।

(ख) परिमेय संख्याओं का समुच्चय \mathbf{Q} , \mathbf{R} का एक विवृत उपसमुच्चय है।

(ग) फलन $f(x) = 3x^2 + |x+3|$ बिन्दु $x = -2$ पर अवकलनीय है।

$$(घ) f(x) = \begin{cases} e^{2x} + e^{-2x}, & x \neq 0 \\ 3, & 0 \end{cases}$$

द्वारा दिया जाने वाला फलन f बिन्दु $x = 0$ पर संतत है।

(ङ) किसी फलन f के समाकलनीय होने के लिए आवश्यक प्रतिबंध है कि वह संतत होगा।

× × × × ×