No. of Printed Pages : 16 **MTE–11**

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)

Term-End Examination

December, 2025

(Elective Course : Mathematics)

MTE-11 : PROBABILITY AND STATISTICS

Time : 2 Hours *Maximum Marks : 50*

Weightage : 70%

Note : *(i) Question No.* ***7*** *is compulsory.*

(ii) Attempt any ***four*** *questions from Q. Nos.* ***1*** *to* ***6****.*

(iii) Symbols have their usual meanings.

(iv) Use of calculator is not allowed.

---

1. (a) The marks (out of 100) of 25 students in an exam are given below : 6

40, 65, 57, 12, 26, 42, 75, 49, 50, 35, 52, 42, 15, 70, 63, 40, 38, 56, 60, 70, 51, 15, 44, 42, 22

(i) Prepare frequency distribution of the marks. Take the first class interval as 10—20.

(ii) Construct ‘less than’ and ‘more than’ cumulative frequency distributions.

(iii) Estimate the proportion of students who got :

(A) less than 50 marks.

(B) more than 70 marks.

(b) An incomplete distribution is given below : 4

Class	**Frequency**
0—10	10
10—20	20
20—30	?
30—40	40
40—50	?
50—60	25
60—70	15
Total	170

Find out missing frequencies if median value is 35.

2. (a) In a certain distribution, the first four central moments are 0, 16, –64 and 162 respectively. Calculate b_1 and b_2 coefficients. Check whether the distribution is skewed. 3

(b) A and B appear in an interview for two vacancies for the same post. The probability of selection of A is $\frac{1}{5}$ and that of B is $\frac{2}{5}$.

Find the probability that :

4

(i) both A and B will be selected.

(ii) at least one of them will be selected.

(c) Let p.m.f. of a random variable X is :

$$f(x) = \frac{3-x}{10}; \qquad x = -1, 0, 1, 2$$

Calculate E(X) and $E(X^2)$. Also, find $E\left[(4X+5)^2\right]$. 3

3. (a) Show that the moment generating function of the Poisson distribution with parameter m is : 3

$$M_X(t) = e^{m(e^t - 1)}$$

(b) The height of students follows approximately a normal distribution with mean 155 cm and standard deviation 5. Find the probability that a student at random has height : 4

(i) less than 150 cm.

(ii) between 150 cm and 160 cm

(You may use $\phi(-1) = 0.1587$ and $\phi(1) = 0.8413$.)

(c) Let $X_1, X_2, \ldots, X_n$ be a random sample from a distribution with density function : 3

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta}; & \theta > 0, x > 0 \\ 0 \;; & \text{otherwise} \end{cases}$$

Show that $\overline{X} = \frac{1}{n} \sum X_i$ is an unbiased estimator for θ.

4. (a) Suppose a bivariate random variable (X, Y) has the joint density function : 5

$$f(x,y) = 4xy\,e^{-(x^2+y^2)}; \quad x \geq 0, y \geq 0.$$

(i) Find the marginal distributions of X and Y.

(ii) Find the condition distribution $f(\frac{x}{y})$.

(iii) Show that X and Y are independent.

(b) If $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$ is a random sample of size *n* from a Poisson distribution with parameter *m*, then find maximum likelihood estimator of *m*. 5

5. (a) Let $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$ be a random sample from a normal distribution N (μ, 1) whose p.d.f. is given by : 6

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^2}; \quad -\infty < x < \mu < \infty$$

Obtain critical region for testing $H_0 : \mu = \mu_0$ against $H_1 : \mu = \mu_1$ $(\mu_1 > \mu_0)$ using Neyman-Pearson lemma.

(b) The following data are about the sales and advertisement expenditure of a firm : 4

	Sales (in crores of ₹)	**Advertisement expenditure**
Mean	40	6
Standard deviation	10	1

Coefficient of correlation (r) = 0.9.

(i) Obtain two regression equations.

(ii) Estimate the sales for a proposed advertisement expenditure of ₹ 4 crores.

6. (a) Let X a be negative exponential variable having probability density function : 6

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-x/2}; & x > 0 \\ 0 \ ; & \text{otherwise} \end{cases}$$

(i) Find mean (μ) and variance (σ^2) of X.

(ii) Obtain the lower limit of $P\left[|X-\mu| \leq 3\sigma\right]$ using Chebyshev's inequality.

(iii) Compare (ii) with its exact value.

(b) A random number generator produces U (0, 1) random numbers are as follows : 4

Class	**Frequency**
0—0.2	8
0.2—0.4	6
0.4—0.6	9
0.6—0.8	9
0.8—1.0	8

Apply Chi-square test that random numbers come from uniform distribution at 5% level of significance. [You may use $\chi^2_{0.05,4} = 9.488$.]

7. Which of the following statements are true *or* false ? Give a short proof or a counter-example in support of your answer : 10

(i) Weather data recorded by the Department of Meterology and used by

the investigator for writing a Ph. D. thesis, is primary data for the investigator.

(ii) If a card is selected from a well-shuffled deck, then probability of drawing a king is $\frac{1}{13}$.

(iii) If the variables X and Y are independent, then the coefficient of correlation between them is 1.

(iv) The expectation of the number on an unbiased dice when thrown is $\frac{7}{2}$.

(v) The variance of binomial distribution with parameter $\left(5, \frac{1}{2}\right)$ is $\frac{5}{4}$.

MTE–11

स्नातक उपाधि कार्यक्रम

(बी. डी. पी.)

सत्रांत परीक्षा

दिसम्बर, 2025

(ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित)

एम.टी.ई.–11 : प्रायिकता और सांख्यिकी

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

भारिता : 70%

नोट : *(i) प्रश्न सं. 7 करना अनिवार्य है।*

*(ii) प्रश्न सं. 1 से 6 तक कोई **चार** प्रश्न कीजिए।*

(iii) संकेतकों के अपने सामान्य अर्थ हैं।

(iv) कैल्कुलेटर का प्रयोग करने की अनुमति नहीं है।

---

1. (क) एक परीक्षा में 25 विद्यार्थियों के अंक (100 में से) निम्नलिखित हैं : 6

40, 65, 57, 12, 26, 42, 75, 49, 50, 35, 52, 42, 15, 70, 63, 40, 38, 56, 60, 70, 51, 15, 44, 42, 22

(i) अंकों का बारंबारता बंटन तैयार कीजिए। पहला वर्ग अंतराल 10–20 लीजिए।

(ii) 'से कम' और 'से अधिक' संचयी बारंबारता बंटन की रचना कीजिए।

(iii) उन विद्यार्थियों का समानुपात ज्ञात कीजिए, जिनके :

(A) अंक 50 से कम हैं।

(B) अंक 70 से अधिक हैं।

(ख) निम्नलिखित अपूर्ण बंटन लीजिए : 4

वर्ग	**बारंबारता**
0—10	10
10—20	20
20—30	?
30—40	40
40—50	?
50—60	25
60—70	15
योग	170

यदि माध्यिका 35 है, तो लुप्त बारंबारताएँ ज्ञात कीजिए।

2. (क) एक विशेष बंटन में, पहले चार केंद्रीय आघूर्ण क्रमशः 0, 16, –64 और 162 हैं। गुणांक b_1 और b_2 ज्ञात कीजिए। जाँच कीजिए कि बंटन वैषम्य है या नहीं। 3

(ख) A और B एक ही पद पर दो रिक्त जगहों के लिए साक्षात्कार में उपस्थित होते हैं। A के चयन की प्रायिकता $\frac{1}{5}$ है और B के चयन की प्रायिकता $\frac{2}{5}$ है। वह प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि : 4

(i) A और B दोनों का चयन होगा।

(ii) उनमें से कम से कम एक का चयन होगा।

(ग) मान लीजिए कि यादृच्छिक चर X का p.m.f. :

$$f(x) = \frac{3-x}{10};\ x = -1, 0, 1, 2$$

है। E(X) और $E(X^2)$ ज्ञात कीजिए। $E\left[(4X+5)^2\right]$ भी ज्ञात कीजिए। 3

3. (क) दर्शाइए कि m प्राचल वाले प्वॉयसां बंटन का आघूर्ण जनक फलन $M_X(t) = e^{m(e^t - 1)}$ होगा। 3

(ख) विद्यार्थियों की लंबाई 155 cm माध्य और 5 मानक विचलन वाले प्रसामान्य बंटन के सन्निकटन है। वह प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि एक यादृच्छया चुने गए विद्यार्थी की लंबाई : 4

(i) 150 cm से कम है।

(ii) 150 cm और 160 cm के बीच है।

[आप $\phi(-1) = 0.1587$ एवं $\phi(1) = 0.8413$ का प्रयोग कर सकते हैं।]

(ग) मान लीजिए कि एक यादृच्छिक प्रतिदर्श $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$ निम्नलिखित घनत्व फलन वाले बंटन से लिया गया है : 3

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta}; & \theta > 0, x > 0 \\ 0 \quad ; & \text{अन्यथा} \end{cases}$$

दर्शाइए कि $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum X_i$; θ का एक अनभिनत आकलक है।

4. (क) मान लीजिए कि एक द्विचर यादृच्छिक चर (X, Y) का संयुक्त घनत्व फलन : 5

$$f(x, y) = 4xy\, e^{-(x^2+y^2)}; \quad x \geq 0, y \geq 0$$

है।

(i) X और Y के सीमांत बंटन ज्ञात कीजिए।

(ii) प्रतिबंधित बंटन $f\left(\frac{x}{y}\right)$ ज्ञात कीजिए।

(iii) दर्शाइए कि X और Y स्वतंत्र हैं।

(ख) यदि $X_1, X_2, ..., X_n$, m प्राचल वाले प्वॉयसां बंटन n आकार से लिया गया एक यादृच्छिक प्रतिदर्श है, तो m का अधिकतम संभावित आकलक ज्ञात कीजिए। 5

5. (क) मान लीजिए कि $X_1, X_2, ..., X_n$, N (μ, 1) वाले प्रसामान्य बंटन से लिया गया एक यादृच्छिक प्रतिदर्श है जिसका p.d.f. निम्नलिखित है : 6

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^2}; -\infty < x < \mu < \infty$$

$H_1 : \mu = \mu_1 \ (\mu_1 > \mu_0)$ के विरुद्ध $H_0 : \mu = \mu_0$ के परीक्षण के लिए नेमान–पीयर्सन प्रमेयिका का प्रयोग करके क्रांतिक प्रदेश निकालिए।

(ख) एक फर्म की बिक्री और विज्ञापन में लगे खर्चे निम्नलिखित आँकड़ों में दिए गए हैं : 4

	बिक्री (करोड़ ₹ में)	विज्ञापन खर्च
माध्य	40	6
मानक विचलन	10	1

सहसंबंध गुणांक (r) = 0.9।

(i) दो समाश्रयण रेखाएँ प्राप्त कीजिए।

(ii) प्रस्तावित विज्ञापन खर्च ₹ 4 करोड़ के लिए बिक्री आकलित कीजिए।

6. (क) मान लीजिए कि X एक ऋणात्मक चरघातांकीय है जिसका प्रायिकता घनत्व फलन : 6

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-x/2}; & x > 0 \\ 0 \;\; ; & \text{अन्यथा} \end{cases}$$

है।

(i) X का माध्य (μ) और प्रसरण (σ^2) ज्ञात कीजिए।

(ii) शेबीशेव असमिका का प्रयोग करके $P\left[|X-\mu| \leq 3\sigma\right]$ की निम्न सीमा निकालिए।

(iii) भाग (ii) के मान की ठीक मान से तुलना कीजिए।

(ख) एक यादृच्छिक संख्या जनित्र निम्नलिखित U (0, 1) यादृच्छिक चर निर्मित करता है : 4

वर्ग	**बारंबारता**
0—0.2	8
0.2—0.4	6
0.4—0.6	9
0.6—0.8	9
0.8—1.0	8

काई-वर्ग का प्रयोग करके परीक्षण कीजिए कि यादृच्छिक संख्याएँ 5% सार्थकता स्तर पर एकसमान बंटन से ली गयी हैं।

[आप $\chi^2_{0.05,4} = 9.488$ का प्रयोग कर सकते हैं।]

7. निम्नलिखित कथनों में से कौन–से कथन सत्य **या** असत्य हैं ? अपने उत्तर के पक्ष में संक्षिप्त उपपत्ति या प्रति–उदाहरण दीजिए : 10

(i) मौसम विभाग द्वारा रिकार्ड किये गये आँकड़े एक अन्वेषक द्वारा Ph. D. थीसिस लिखने के लिए प्रयोग किये गये, अन्वेषक के लिए यह प्राथमिक आँकड़े हैं।

(ii) यदि एक अच्छी फैंटी हुई ताशों की गड्डी से एक पत्ता चुना जाता है, तो एक बादशाह निकलने की प्रायिकता $\frac{1}{13}$ होगी।

(iii) यदि चर X और Y स्वतंत्र हैं, तो उनके बीच सहसंबंध गुणांक 1 होगा।

(iv) एक अनभिनत पासे को फेंकने पर आयी संख्या की प्रत्याशा $\frac{7}{2}$ है।

(v) प्राचल $\left(5, \frac{1}{2}\right)$ वाले द्विपद बंटन का प्रसरण $\frac{5}{4}$ होता है।

× × × × ×