No. of Printed Pages : 10 **MTE–13**

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)

Term-End Examination

December, 2025

MTE-13 : DISCRETE MATHEMATICS

Time : 2 Hours *Maximum Marks : 50*

Note : *Question No.* ***1*** *is compulsory. Do any* ***four*** *questions from Q. Nos.* ***2*** *to* ***7****. Calculator is not allowed.*

1. Which of the following statements are True and which are False ? Justify your answers : 10

   (i) There is at least one graph with five vertices of degrees 2, 2, 2, 2, 3.

   (ii) The generating function for the sequence $a_n = n + 1$ is $\dfrac{1}{1+z}$.

(iii) $q \to (p \to q)$ is a tautology.

(iv) There is a 3-regular graph on n vertices, $\forall\ n \geq 4$.

(v) 5 has a self-conjugate partition.

2. (a) Using induction, show that : 4

$$2n^2 > (n + 1)^2, \qquad \forall\ n \geq 3$$

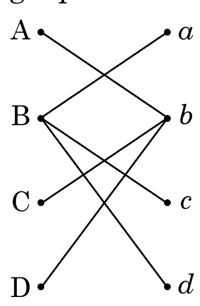
(b) Find the general solution of the recurrence relation : $a_n - 3a_{n-1} = 3.2^n$.

Also find the solution when $a_1 = 6$. 4

(c) Prove or disprove : 2

"The complete graph, K_5, has a Eulerian circuit."

3. (a) Define a complete matching in a bipartite graph. Check whether or not, there is a complete matching in the following graph : 3



(b) Calculate the Stirling number S_4^2. 3

(c) Using the generating function technique, evaluate the sum : 4

$$\sum_{k=1}^{n} k\, 2^k C(n, k)$$

4. (a) Test the validity of the following argument using truth table : 5

$$\begin{array}{l} p \to q \\ r \to \sim q \\ \qquad r \\ \hline \therefore \quad \sim p \\ \hline \end{array}$$

(b) Let G be a graph with n vertices. Prove that if G is a tree, then G is acyclic and has $n - 1$ edges. 5

5. (a) A box contains 7 blue and 5 black balls. 4 balls are selected from the box at random. What is the probability that 2 of the selected balls will be black and 2 will be blue. 4

(b) If $K_{m, n}$ for $m, n \geq 2$, is Hamiltonian, how are m and n related ? Justify your answer. 2

(c) Find the solution of the recurrence relation : $a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2}$; $a_0 = 0$, $a_1 = 5$. 4

6. (a) If a k-regular graph has no cycle of length less than five, show that it must have at least $k^2 + 1$ vertices. 5

(b) Without using a truth table, find the CNF of the Boolean expression : 5

$$[(x_2' \wedge x_3) \vee (x_1' \wedge x_2')]'$$

7. (a) Let S = $\{x_i : 1 \leq i \leq 7)$. If the members of this set are arranged on a circle, find the number of arrangements, when x_1 and x_3 are always adjacent to each other. 3

(b) A school has 100 students with 40 of them taking English, 40 taking Hindi and 40 taking Punjabi. 20 students are taking English and Hindi, 20 taking Hindi and Punjabi, 20 taking English and Punjabi and 10 taking all three languages. Find out how many students are taking no languages. 3

(c) Let a_n denote the number of ways of climbing a staircase with n steps such that one step or two steps are taken at a time. Find a recurrence relation for a_n and initial conditions that would be required for solving it. 4

MTE–13

स्नातक उपाधि कार्यक्रम

(बी. डी. पी.)

सत्रांत परीक्षा

दिसम्बर, 2025

एम.टी.ई.–13 : विविक्त गणित

समय : 2 घण्टे   *अधिकतम अंक : 50*

नोट : *प्रश्न सं. **1** अनिवार्य है। प्रश्न सं. **2** से **7** तक किन्हीं **चार** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। कैल्कुलेटरों के प्रयोग की अनुमति नहीं है।*

---

1. निम्नलिखित में से कौन-से कथन सत्य हैं और कौन-से असत्य ? अपने उत्तरों की पुष्टि कीजिए : 10

   (i) पाँच शीर्षों पर कम-से-कम एक ग्राफ तो ऐसा है जिसकी कोटियाँ $2, 2, 2, 2, 3$ हैं।

   (ii) अनुक्रम $a_n = n + 1$ के लिए जनक फलन $\frac{1}{1+z}$ है।

(iii) $q \to (p \to q)$ एक सर्वसत्य कथन है।

(iv) सभी $n \geq 4$ के लिए, n शीर्षों पर एक 3-नियमित ग्राफ है।

(v) 5 का एक स्वसंयुग्मी विभाजन है।

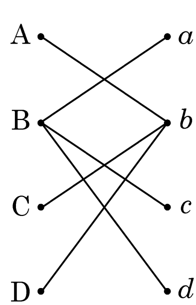
2. (क) आगमन नियम से दिखाइए कि सभी $n \geq 3$ के लिए $2n^2 > (n+1)^2$ होता है। 4

(ख) पुनरावृत्ति संबंध $a_n - 3a_{n-1} = 3.2^n$ का व्यापक हल ज्ञात कीजिए। साथ ही, हल ज्ञात कीजिए यदि $a_1 = 6$ हो। 4

(ग) सिद्ध या असिद्ध कीजिए : 2

"पूर्ण ग्राफ K_5 का एक ऑयलरीय परिपथ है।"

3. (क) एक द्विभाजित ग्राफ में एक पूर्ण सुमेलन परिभाषित कीजिए। जाँच कीजिए कि नीचे दिए गए ग्राफ में एक पूर्ण सुमेलन है या नहीं : 3



(ख) स्टर्लिंग संख्या S_4^2 ज्ञात कीजिए। 3

(ग) जनक फलन विधि से, योगफल :

$$\sum_{k=1}^{n} k\, 2^k C(n, k)$$

का मान ज्ञात कीजिए। 4

4. (क) सत्य सारणी का प्रयोग करके, निम्नलिखित तर्क की वैधता की जाँच कीजिए : 5

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ r \rightarrow \sim q \\ \quad r \\ \hline \therefore \quad \sim p \\ \hline \end{array}$$

(ख) मान लीजिए G एक n शीर्षों वाला ग्राफ है। सिद्ध कीजिए कि यदि G एक वृक्ष है, तो G अचक्रीय है और इसमें $n - 1$ कोरें हैं। 5

5. (क) एक संदूक में 7 नीली और 5 काली गेंदें हैं। संदूक से 4 गेंदें यादृच्छया निकाली जाती हैं। क्या प्रायिकता है कि निकाली गई गेंदों में से 2 गेंदें काली हैं और 2 गेंदें नीली हैं। 4

(ख) यदि $m, n \geq 2$ के लिए $K_{m,n}$ हैमिल्टोनीय है, तो m और n किस प्रकार सम्बन्धित हैं ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। 2

(ग) पुनरावृत्ति संबंध $a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2}$; $a_0 = 0$, $a_1 = 5$ का हल ज्ञात कीजिए। 4

6. (क) यदि एक k-नियमित ग्राफ में लम्बाई 5 से कम वाला कोई भी चक्र नहीं है, तो दिखाइए कि इसमें कम–से–कम $k^2 + 1$ शीर्ष होंगे। 5

(ख) सत्य सारणी का प्रयोग किए बिना, बूलीय व्यंजक $[(x_2' \wedge x_3) \vee (x_1' \wedge x_2')]'$ का CNF ज्ञात कीजिए। 5

7. (क) मान लीजिए $S = \{x_i : 1 \leq i \leq 7)$ है। यदि इस समुच्चय की संख्याएँ एक वृत्त पर व्यवस्थित की जाती हैं, तो उन विन्यासों की संख्या ज्ञात कीजिए जिनमें x_1 और x_3 हमेशा साथ–साथ आते हों। 3

(ख) एक विद्यालय में 100 छात्र हैं, जिनमें से 40 छात्र इंग्लिश, 40 हिन्दी और 40 पंजाबी भाषा चुनते हैं। 20 छात्र इंग्लिश और हिन्दी, 20 छात्र हिन्दी और पंजाबी, 20 छात्र इंग्लिश और पंजाबी भाषाएँ लेते हैं और 10 छात्र तीनों भाषाएँ लेते हैं। ज्ञात कीजिए कि ऐसे कितने छात्र हैं जिन्होंने कोई भी भाषा नहीं ली है। 3

(ग) मान लीजिए a_n, n पदों वाली एक सीढ़ी पर चढ़ने के तरीकों को व्यक्त करता है, जबकि प्रत्येक कदम पर या तो एक पद चढ़ा जाए या एक साथ दो पद। a_n के लिए एक पुनरावृत्ति संबंध ज्ञात कीजिए और इसे हल करने के लिए प्रारम्भिक प्रतिबंध भी ज्ञात कीजिए। 4

× × × × ×