No. of Printed Pages : 16 **MTE–14**

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME

(BDP)

Term-End Examination

December, 2025

(ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS)

MTE-14 : MATHEMATICAL MODELLING

Time : 2 Hours *Maximum Marks : 50*

Weightage : 70%

Note : *Attempt any* ***five*** *questions. All questions carry equal marks. Use of calculators is not allowed. Symbols have their usual meanings.*

---

1. (a) Suppose that a string of length l is connected to a fixed point at one end and to a stick of mass m at the other. The stick is whirling in a circle at constant velocity v. Using dimensional analysis find the equation of the force in the string. 4

(b) A particle is moving with S.H.M. in a straight line. When the distance of particle from the equilibrium position has the values x_1 and x_2, the corresponding values of the velocity are v_1 and v_2. Show that the time period is $2\pi\sqrt{\frac{x_2^2 - x_1^2}{v_1^2 - v_2^2}}$. Also find the amplitude and maximum velocity of the particle. 6

2. (a) A particle is projected vertically upwards with the velocity u m/sec. After t seconds, another particle is projected upwards from the same point and with the same velocity. Prove that the particle will meet at a height $\frac{4u^2 - g^2t^2}{8g}$ metres after a time $\left(\frac{t}{2} + \frac{u}{g}\right)$ seconds from the start. 5

(b) Consider arterial blood viscosity $\mu = 0.02$ poise. If the length of the artery is 2·5 cm, radius is 8×10^{-3} cm and $P = P_1 - P_2 = 4 \times 10^3$ dynes/cm^2, then find, 5

(i) maximum peak velocity of blood, and

(ii) the shear stress at the wall.

3. (a) Consider the motion of a simple pendulum. Write the differential equation describing the motion of the simple pendulum with initial conditions $\theta = \theta_0$ at $t = 0$ and $\frac{d\theta}{dt} = 0$ at $t = 0$, for both the linear and non-linear models. Give the expressions for the time periods for both the cases. In the linear cases, derive the time period. Suppose the length of the pendulum is doubled, then find the time period of the pendulum in both the cases. 6

(b) Bacteria cells grow at a rate proportional to the volume of dividing cells at that moment. If V_0 is the volume of dividing cells at the initial time t_0, then find the volume of dividing cells at any time t. Find the time at which the volume of the cells will be double its original size. 4

4. (a) For the pay-off matrix given below, transform the matrix game into corresponding linear programming problems for player A and player B : 4

Player B

$$\text{Player A}\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -7 & 8 \\ -8 & 8 & -9 \\ 9 & -10 & 11 \end{bmatrix}$$

(b) Suppose the populations x and y satisfy the equations :

$$\frac{dx}{dt} = 60x - 4x^2 - 3xy$$

$$\frac{dy}{dt} = 42y - 2y^2 - 3xy$$

Find all critical points of the system. Which critical point represents the possibility of co-existence of two species ? Discuss the type and stability of that critical point. 6

5. (a) Sulphur dioxide is emitted at a rate of 260 g/s from a stack with an effective height of 80 m. The wind velocity at a stack is 6 m/s and the atmospheric stability class D for the overcast day. Determine the ground level concentration along the centre line at a distance 900 m from a stack, in micrograms per cubic meter.

σ_y = 69 m and σ_z = 29·5 m are the standard deviations in the vertical direction and cross wind direction, respectively. 5

(b) Suppose the quarterly sales for a particular shop were 2682, 2462 and 3012, respectively. From past data prior

to these three data points, a straight line was the fit. The value on the line corresponding to the last observed time is 2988, and the slope is 80. Use exponential smoothing based upon the three observations given above to forecast sales for the fifth period using $\alpha = \beta = 0{\cdot}2$. 5

6. (a) The return distribution of securities 1 and 2 is as follows : 6

Event (j)	Chace ($r_{1j} = r_{2j}$)	Return	
		R_{1j}	R_{2j}
1	0·33	19	18
2	0·25	17	16
3	0·17	11	11
4	0·25	10	9

Find which security is more risky in the Markowitz's sense.

(b) Characterise the following as deterministic or stochastic, giving reasons for your answers : 4

(i) Functioning of a joint.

(ii) Output product in a chemical reaction.

(iii) The movement of sand dunes.

(iv) The effectiveness of different advertising policies.

7. (a) Write the difference between the Geocentric model and the Heliocentric model used to study the solar system. 2

(b) Some diseases are spread largely by carriers, individuals who can transmit the disease but who exhibit no overt symptoms. Let x and y, respectively, denote the proportion of susceptible and carriers in the population. Suppose that carriers are identified and removed from the population at a rate 0.3 so that

$$\frac{dy}{dt} = -0.3y.$$

Suppose also that the disease spreads at a rate proportional to the product of x and y, thus $\frac{dx}{dt} = -0{\cdot}25\,xy$.

(i) Determine the proportions of carriers at any time t, where $y(0) = 3000$. 2

(ii) Find the susceptibles at time t, where initially $x(0) = 100$. 4

(c) What are the critical points and equilibrium solutions of a system of equations :

$$\frac{dx}{dt} = \mathrm{F}(x, y) \text{ and } \frac{dy}{dt} = \mathrm{G}(x, y)$$ 2

MTE–14

स्नातक उपाधि कार्यक्रम

(बी. डी. पी.)

सत्रांत परीक्षा

दिसम्बर, 2025

(ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित)

एम.टी.ई.–14 : गणितीय निदर्शन

समय : 3 घण्टे *अधिकतम अंक : 100*

नोट : *किन्हीं **पाँच** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं। कैलकुलेटर का प्रयोग करने की अनुमति नहीं है। प्रतीकों के सामान्य अर्थ हैं।*

---

1. (क) लम्बाई l के एक धागे को एक सिरे पर नियत बिन्दु से और दूसरे सिरे पर द्रव्यमान m को छड़ी से जोड़ा जाता है। छड़ी एकसमान वेग v पर वृत्ताकार घूम रही है। धागे में बल का समीकरण ज्ञात करने के लिए विमीय विश्लेषण का प्रयोग कीजिए। 4

(ख) एक कण सरल आवर्त गति (SHM) से एक सरल रेखा में गतिमान है। सामान्यावस्था से जब कण की दूरी x_1 और x_2 होती है, तो उसका वेग क्रमशः v_1 और v_2 होता है। दिखाइए कि आवर्तकाल $2\pi\sqrt{\frac{x_2^2 - x_1^2}{v_1^2 - v_2^2}}$ है। कण का आयाम और अधिकतम वेग भी ज्ञात कीजिए। 6

2. (क) एक कण को ऊर्ध्वाधरतः वेग u m/sec के साथ ऊपर की ओर प्रक्षेपित किया जाता है? t सेकण्ड के बाद, उसी वेग के साथ और उसी बिन्दु से दूसरा कण ऊपर की ओर प्रक्षेपित किया जाता है। सिद्ध कीजिए कि दोनों कण फेंके जाने के $\left(\frac{t}{2} + \frac{u}{g}\right)$ सेकण्ड के बाद $\frac{4u^2 - g^2t^2}{8g}$ मीटर ऊँचाई पर मिलेंगे। 5

(ख) रक्त–धमनी की श्यानता $\mu = 0.02$ पॉयज लीजिए। यदि धमनी की लम्बाई 2·5 सेमी, त्रिज्या 8×10^{-3} सेमी और $P = P_1 - P_2 = 4 \times 10^3$ dynes/cm^2 हो, तो निम्नलिखित ज्ञात कीजिए : 5

(i) रक्त का अधिकतम शिखर वेग, और

(ii) भित्ति पर अपरूपण प्रतिबल।

3. (क) एक सरल लोलक की गति लीजिए। रैखिक और अरैखिक निदर्श दोनों के लिए प्रारम्भिक प्रतिबन्धों $t = 0$ पर $\theta = \theta_0$ और $t = 0$ पर $\frac{d\theta}{dt} = 0$ के अधीन सरल लोलक की गति का वर्णन करते हुए अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए। दोनों स्थितियों की समयावधियों के लिए व्यंजक दीजिए। रैखिक स्थिति में, समयावधि व्युत्पन्न कीजिए। मान लीजिए, लोलक की लम्बाई दोगुनी कर दी जाए, तो दोनों स्थितियों में लोलक की समयावधि ज्ञात कीजिए। 6

(ख) जीवाणु कोशिकाएँ उस क्षण में विभाजनकारी कोशिकाओं के आयतन की आनुपातिक दर से वृद्धि करती हैं। यदि V_0 आरम्भिक काल में विभाजनकारी कोशिकाओं का आयतन है, तो किसी समय t पर विभाजनकारी कोशिकाओं के आयतन का पता कीजिए। उस समय का पता कीजिए जिस पर कोशिकाओं का आयतन अपने मूल साइज का दोगुना हो जाएगा। 4

4. (क) नीचे दिए गए भुगतान आव्यूह के लिए आव्यूह खेल को खिलाड़ी A और खिलाड़ी B की संगत रैखिक प्रोग्रामन समस्याओं में रूपांतरित कीजिए : 4

खिलाड़ी B

खिलाड़ी A (rows 1, 2, 3)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -7 & 8 \\ -8 & 8 & -9 \\ 9 & -10 & 11 \end{bmatrix}$$

(ख) मान लीजिए समष्टि x और y निम्नलिखित समीकरणों को संतुष्ट करती हैं : 6

$$\frac{dx}{dt} = 60x - 4x^2 - 3xy$$

$$\frac{dy}{dt} = 42y - 2y^2 - 3xy$$

निकाय के सभी क्रांतिक बिन्दु ज्ञात कीजिए। कौन–सा क्रांतिक बिन्दु इन दोनों स्पीशीज के सह–अस्तित्व की सम्भावना को निरूपित करता है ? उस क्रांतिक बिन्दु के प्रकार और स्थायित्व पर चर्चा कीजिए।

5. (क) 80 मी. की प्रभावी ऊँचाई वाले एक स्टैक से 260 g/s की दर से सल्फर डाइऑक्साइड उत्सर्जित हो रही है। स्टैक पर पवन वेग 6 m/s है और बादल छाए हुए हैं। दिन में वायुमण्डलीय स्थायित्व वर्ग D है। माइक्रोग्राम प्रति घन मीटर में स्टैक से 900 मी की दूरी पर केन्द्र रेखा के अनुदिश भूमि तल सांद्रण निर्धारित कीजिए।

संकेत : (σ_y = 69 m और σ_z = 29·5 m क्रमशः ऊर्ध्वाधर दिशा और अनुप्रस्थ पवन दिशा में मानक विचलन हैं।) 5

(ख) मान लीजिए दिल्ली में एक कार की तिमाही बिक्री क्रमशः 2682, 2462 और 3012 थी। पिछले आँकड़ों (इन तीन आँकड़ा बिन्दुओं से पहले) से एक सरल रेखा आसंजित की गई थी। रेखा पर अंतिम प्रेक्षित समय का संगत मान 2988 है और प्रवणता 80 है। $\alpha = \beta = 0{\cdot}2$ मानकर इन प्रेक्षणों की तिमाही अवधि की बिक्रियों का पूर्वानुमान लगाने के लिए ऊपर दिए गए तीन प्रेक्षणों पर आधारित चरघातांकी मसृणीकरण का प्रयोग कीजिए। 5

6. (क) प्रतिभूतियों 1 और 2 का प्रतिफलन बंटन इस प्रकार है : 6

घटना (i)	संयोग ($r_{1j} = r_{2j}$)	प्रतिफल	
		R_{1j}	R_{2j}
1	0·33	19	18
2	0·25	17	16
3	0·17	11	11
4	0·25	10	9

ज्ञात कीजिए मार्कोविच के अनुसार कौन–सी प्रतिभूति अधिक जोखिमपूर्ण है।

(ख) अपने उत्तर का कारण देते हुए निम्नलिखित को निर्धारणात्मक अथवा प्रसंभाव्य के रूप में अभिलक्षणित कीजिए : 4

(i) शरीर में जोड़ का कार्य

(ii) रासायनिक प्रतिक्रिया में उत्पाद

(iii) रेत के टीलों की गति

(iv) विभिन्न विज्ञापन नीतियों की प्रभावशीलता

7. (क) भूकेन्दी और सूर्यकेन्द्री निदर्श के बीच अन्तर लिखिए जिनका उपयोग सौर–तंत्र के अध्ययन के लिए किया जाता है। 2

(ख) कुछ रोग व्यापक रूप से वाहकों के द्वारा संचारित होते हैं, जो ऐसे व्यक्ति हैं जो रोग को संचारित कर सकते हैं, लेकिन वे कोई लक्षण प्रदर्शित नहीं करते हैं। मान लीजिए x और y क्रमशः जनसंख्या में संवेदनशील जनों और वाहकों के अनुपात को प्रदर्शित करते हैं। मान लीजिए कि वाहकों की पहचान करके उनको जनसंख्या में से 0.3 की दर से निकाल दिया गया तो

$$\frac{dy}{dt} = -0.3y \text{ ।}$$

यह भी मान लीजिए कि रोग का प्रसार x और y के गुणनफल के समानुपाती है, अतः

$$\frac{dx}{dt} = -0{\cdot}25\,xy$$

(i) वाहकों के अनुपात का किसी समय t पर निर्धारण कीजिए। 2

जहाँ $y(0) = 3000$

(ii) संवेदनशीलों का समय t पर पता कीजिए। 4

जहाँ आरम्भ में $x(0) = 100$

(ग) निम्न समीकरणों के निकाय के क्रांतिक बिन्दु और साम्यावस्था हल क्या होंगे : 2

$$\frac{dx}{dt} = F(x, y) \text{ और } \frac{dy}{dt} = G(x, y)$$

× × × × ×