No. of Printed Pages : 12 **PHE–14**

BACHELOR OF SCIENCE

(B. Sc.)

Term-End Examination

December, 2025

PHE-14 : MATHEMATICAL METHODS IN PHYSICS—III

Time : 2 Hours *Maximum Marks : 50*

Note : *(i) Attempt all questions.*

(ii) The marks for each question are indicated against it.

(iii) Symbols have their usual meanings.

---

1. Attempt any *five* parts :

(a) Show that the matrix A : 2

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{-i}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

is unitary.

(b) What are free index and dummy index in a tensor ? Identify and write free indices and dummy indices in the following equation : 2

$$A'^{ij} = \sum_{kl} \frac{\partial x'_i}{\partial x_k} \frac{\partial x'_j}{\partial x_l} A^{kl}$$

(c) Locate and name the singularity of the following function in the finite z-plane :

2

$$\frac{z^2 - 2z}{z^2 + 2z + 2}$$

(d) Calculate the residue of the function : 2

$$\frac{z+3}{z^2 - 3z}$$

(e) Obtain the Fourier transform of the function : 2

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

(f) Obtain the Laplace transform of $e^{5t} \cos t$. 2

(g) Write the Legendre polynomials $P_0(x)$ and $P_1(x)$ and show that they are orthogonal. 2

(h) Plot Laguerre polynomials $L_n(x)$ for $n = 0$ and $n = 1$. 2

2. Attempt any *two* parts :

(a) Obtain the eigen values and eigen vectors of the following matrix : 5

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Show that its eigen vectors are orthogonal.

(b) (i) Show that the eigen vectors belonging to distinct eigen values of a Hermitian matrix are orthogonal to each other. 3

(ii) Show that {1, –1} is a subgroup of the multiplicative group {1, *i*, –1, –*i*}. 2

(c) For the quadratic equation $2x^2 + 4xy - y^2 = 24$, write down the matrix of coefficients and diagonalize it. Recast it in new variables and identify the conic section it represents. 5

3. Attempt any *two* parts :

(a) Using the method of residues, prove that : 5

$$\int_0^{\infty} \frac{d\theta}{1+\sin^2\theta} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

(b) Obtain the Laurent's series expansion of $\frac{e^z}{(z-1)^2}$ in the neighbourhood of the singular points and calculate the residue. 5

(c) Evaluate the integral $\oint_C \frac{dz}{1+z^2}$, where C is the circle $|z| = 3$. 5

4. Attempt any *two* parts :

(a) Obtain the Fourier cosine transform of the function : 5

$$f(x) = e^{-px}, \quad 0 < x < \infty, \quad p > 0$$

(b) Using the Laplace transforms, solve the initial value problem : 5

$$y'' - 4y' + 3y = 0;\ y\,(0) = 3,\ y'(0) = 7$$

(c) Calculate the inverse Laplace transform of the function : 5

$$\frac{s}{(s-1)^2 - 4}.$$

5. Attempt any *one* part :

(a) The expression for Bessel's function of the first kind of order m is given by : 10

$$J_m(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!\,\Gamma(m+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+m}$$

Show that :

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, x^{-1/2} \sin x$$

and $$J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, x^{-1/2} \cos x.$$

(b) Using the generating function for Hermite polynomials : 10

$$g(x,t) = e^{2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{H}_n(x)\frac{t^n}{n!}$$

obtain the recurrence relation :

$$\mathrm{H}_{n+1}(x) = 2x\mathrm{H}_n(x) - \mathrm{H}'_n(x)$$

PHE–14

विज्ञान स्नातक (बी. एस.-सी.)

सत्रांत परीक्षा

दिसम्बर, 2025

पी.एच.ई.-14 : भौतिकी में गणितीय विधियाँ—III

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

नोट : *(i) सभी प्रश्न कीजिए।*

(ii) प्रत्येक प्रश्न के अंक उसके सामने दिए गए हैं।

(iii) प्रतीकों के अपने सामान्य अर्थ हैं।

1. कोई **पाँच** भाग कीजिए :

(क) सिद्ध कीजिए कि निम्नलिखित आव्यूह A ऐकिक आव्यूह है : 2

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{-i}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

(ख) टेन्सर में मुक्त सूचकांक (free index) और मूक सूचकांक (dummy index) क्या होते हैं ? समीकरण : 2

$$A'^{ij} = \sum_{kl} \frac{\partial x'_i}{\partial x_k} \frac{\partial x'_j}{\partial x_l} A^{kl}$$

में मुक्त सूचकांक और मूक सूचकांक पहचानिए और लिखिए।

(ग) निम्नलिखित फलन की विचित्रताओं का परिमित z–समतल में स्थान निर्धारण कीजिए और उसका नाम बताइए : 2

$$\frac{z^2 - 2z}{z^2 + 2z + 2}$$

(घ) फलन $\frac{z+3}{z^2 - 3z}$ का अवशिष्ट परिकलित कीजिए। 2

(ङ) निम्नलिखित फलन का फूरिये रूपांतर प्राप्त कीजिए : 2

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{अन्यथा} \end{cases}$$

(च) फलन $e^{5t} \cos t$ का लाप्लास रूपांतर प्राप्त कीजिए। 2

(छ) $P_0(x)$ और $P_1(x)$ लैजेण्ड्रे बहुपदों को लिखिए और सिद्ध कीजिए कि ये लांबिक हैं। 2

(ज) $n = 0$ और $n = 1$ के लिए लागरे बहुपदों $L_n(x)$ का आलेख खींचिए। 2

2. कोई **दो** भाग कीजिए :

(क) निम्नलिखित आव्यूह के आइगेन मान और आइगेन सदिश ज्ञात कीजिए : 5

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

सिद्ध कीजिए कि इसके आइगेन सदिश लांबिक हैं।

(ख) (i) सिद्ध कीजिए कि हर्मिटी आव्यूह के भिन्न आइगेन मानों के संगत आइगेन सदिश एक-दूसरे के प्रति लांबिक होते हैं। 3

(ii) सिद्ध कीजिए कि $\{1, -1\}$ गुणनात्मक समूह $\{1, i, -1, -i\}$ का एक उपसमूह है। 2

(ग) द्विघात समीकरण $2x^2 + 4xy - y^2 = 24$ के लिए गुणांकों का आव्यूह लिखिए और उसका विकर्णन कीजिए। उसे नए चरों में प्रस्तुत कीजिए और बताइए कि यह किस शांकव परिच्छेद को निरूपित करता है ? 5

3. कोई **दो** भाग कीजिए :

(क) अवशिष्ट–विधि का उपयोग कर सिद्ध कीजिए कि : 5

$$\int_0^{\infty} \frac{d\theta}{1+\sin^2\theta} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

(ख) विचित्र बिन्दुओं के प्रतिवेश में फलन $\frac{e^z}{(z-1)^2}$ का लौरां श्रेणी प्रसार प्राप्त कीजिए और अवशिष्ट परिकलित कीजिए। 5

(ग) समाकलन $\oint_C \frac{dz}{1+z^2}$ का मान परिकलित कीजिए, जहाँ C वृत्त $|z| = 3$ है। 5

4. कोई **दो** भाग कीजिए :

(क) फलन :

$$f(x) = e^{-px}, \quad 0 < x < \infty, \quad p > 0$$

का फूरिये कोसाइन रूपांतर प्राप्त कीजिए। 5

(ख) लाप्लास रूपांतर का उपयोग कर आदि मान समस्या : 5

$$y'' - 4y' + 3y = 0;\ y\,(0) = 3,\ y'(0) = 7$$

को हल कीजिए।

(ग) निम्नलिखित फलन का व्युत्क्रम लाप्लास रूपांतर परिकलित कीजिए : 5

$$\frac{s}{(s-1)^2 - 4}$$

5. कोई **एक** भाग कीजिए :

(क) कोटि m वाले प्रथम प्रकार के बेसल फलन का व्यंजक निम्न द्वारा दिया जाता है : 10

$$\mathrm{J}_m(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!\,\Gamma(m+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+m}$$

सिद्ध कीजिए कि :

$$\mathrm{J}_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, x^{-1/2} \sin x$$

और $$\mathrm{J}_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, x^{-1/2} \cos x$$

(ख) हर्मिट बहुपदों के जनक फलन : 10

$$g(x,t) = e^{2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)\frac{t^n}{n!}$$

का उपयोग कर निम्नलिखित पुनरावृत्ति संबंध प्राप्त कीजिए :

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - H'_n(x)$$

× × × × ×