No. of Printed Pages : 15 **BMTC–133**

# BACHELOR OF SCIENCE (GENERAL)/BACHELOR OF ARTS (GENERAL) (BSCG/BAG)

## Term-End Examination

## June, 2025

### BMTC-133 : REAL ANALYSIS

*Time : 3 Hours* *Maximum Marks : 100*

---

***Note :*** *(i) Question No.* ***1*** *is* ***compulsory****. Do any* ***six*** *questions from Q. Nos.* ***2*** *to* ***8****.*

*(ii) Use of calculator is* ***not*** *allowed.*

---

1. Which of the following statements are **True** or **False** ? Give reason for your answer in the form of a short proof or a counter-

example, whichever is appropriate for each statement : 5×2=10

(a) –2 is not a limit point of the empty set $\phi$.

(b) If $(a_n)_{n \in \underline{N}}$ is a convergent sequence, then $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ is a convergent series.

(c) Every continuous function is differentiable.

(d) Every integrable function is monotonic.

(e) The set $S = \left\{ \frac{n^2+1}{n^2} : n \in \mathbf{N} \right\}$ is bounded above.

2. (a) For any subset S of **R**, show that $\overline{S}$ is a closed set. 5

(b) Find the radius of convergence of a series $\Sigma a_n x^n$, where $a_n = \frac{n!}{n^n}$. 6

(c) Test the series $\sum \frac{n^{5/2}}{4n^3 - 3n^2}$ for convergence. 4

3. (a) Show that $f(x) = x^3$ is Riemann integrable on [0, 1]. Deduce that $\int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}$. 5

(b) Show that the series $\sum \frac{\sin(n^3 x)}{n^{5/2}}$ is uniformly convergent on $[0, \infty[$. 5

(c) Using the definition of limit, prove that

$$\left(\frac{(\sin 2n + \cos 3n)}{n}\right)_{n \in \underline{\mathbf{N}}}$$ converges to zero.

5

4. (a) Find infimum and supremum of the set

$S = \left\{ \frac{n-1}{n} : n \in \mathbf{N} \right\}$, if the same exist. 5

(b) Check whether the series $\sum \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n^2} . \ 3^n$

is convergent or not. 5

(c) Let a function $f$ be defined as : 5

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}, & x \neq 2 \\ 1, & x = 2 \end{cases}$$

Is $f$ continuous at $x = 2$ ? If not, find the nature of discontinuity and redefine $f$ to make it continuous, if possible.

5. (a) Prove the following : 5

(i) $\lim_{x \to \infty} \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = 1$

(ii) $\lim_{x \to \infty} \frac{x + 2\sin x}{x + 2\cos x} = 1$

(b) Apply Cauchy integral test to find : 5

$$\lim_{n \to \infty} \left[ \frac{1}{\sqrt{n^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 - 1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 - 2^2}} + \dots\dots\dots + \frac{1}{\sqrt{n^2 - (n-1)^2}} \right].$$

(c) Prove or disprove the following : 5

"The set of rational numbers is countable."

6. (a) Show that the series $\Sigma a_n$, where $a_n = \frac{n^2 + n + 2}{n^2 - n + 2}$, diverges. 4

(b) Show that the equation $2x^3 - 18x + 7 = 0$, does not have two distinct real roots in the interval [–1, 1]. 5

(c) Prove or disprove the following statements : 6

(i) The sequence $\left(\frac{\cos n}{n}\right)_{n \in \underline{\underline{\mathbf{N}}}}$ converges.

(ii) Every sequence, which is not monotone, diverges.

7. (a) Prove that $\sqrt{10}$ is not a rational number. 5

(b) Evaluate : 5

$$\lim_{n \to \infty} \left[\frac{(n!)^3}{(3n)!}\right]^{\frac{1}{n}}$$

(c) Let $f$ : [0, 1] $\rightarrow$ **R** be the Dirichlet function, defined by : 5

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{if } x \in [0,1] \text{ is rational} \\ 0, & \text{if } x \in [0,1] \text{ is irrational} \end{cases}.$$

Check whether the function $f$ is Riemann integrable ?

8. (a) Prove that $1 - x > e^{-x}$, if $x > 0$. 5

(b) Find Maclaurin's series for sin $x$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

5

(c) For the sequence $(f_n)_{n \in \underline{\mathbf{N}}}$, where $f_n : [0,1] \rightarrow \underline{\mathbf{R}}$, $f_n(x) = \dfrac{\cos 2nx}{n^3}$, check whether or not, it is uniformly convergent on [0, 1]. 5

# BMTC–133

## विज्ञान स्नातक (सामान्य)/कला स्नातक (सामान्य)

## (बी. एस-सी. जी./बी. ए. जी.)

## सत्रांत परीक्षा

## जून, 2025

## बी.एम.टी.सी.–133 : वास्तविक विश्लेषण

*समय : 3 घण्टे* *अधिकतम अंक : 100*

---

**नोट :** *(i)* *प्रश्न सं. **1** करना अनिवार्य है। प्रश्न सं. **2** से **8** तक किन्हीं **छः** प्रश्नों के उत्तर दीजिए।*

*(ii)* *कैल्कुलेटर के उपयोग की अनुमति नहीं है।*

---

1. निम्नलिखित में से कौन-से कथन सत्य और कौन-से असत्य हैं ? प्रत्येक कथन के अपने उत्तर के लिए, एक संक्षिप्त

उपपत्ति या एक प्रति–उदाहरण के रूप में (जो भी उपयुक्त हो) कारण दीजिए : 5×2=10

(क) −2, रिक्त समुच्चय $\phi$ का एक सीमा बिंदु नहीं है।

(ख) यदि $(a_n)_{n \in \underline{\mathrm{N}}}$ एक अभिसारी अनुक्रम है, तो $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ एक अभिसारी श्रेणी है।

(ग) प्रत्येक संतत फलन अवकलनीय फलन होता है।

(घ) प्रत्येक समाकलनीय फलन एकदिष्ट होता है।

(ङ) समुच्चय $\mathrm{S} = \left\{ \frac{n^2+1}{n^2} : n \in \mathbf{N} \right\}$ उपरितः परिबद्ध है।

2. (क) $\mathbf{R}$ के किसी उपसमुच्चय S के लिए, दर्शाइए कि $\overline{S}$ एक संवृत समुच्चय है। 5

(ख) श्रेणी $\Sigma a_n x^n$ की अभिसारिता की त्रिज्या ज्ञात कीजिए, जहाँ $a_n = \frac{n!}{n^n}$ है। 6

(ग) श्रेणी $\sum \frac{n^{5/2}}{4n^3 - 3n^2}$ की अभिसारिता के लिए जाँच कीजिए। 4

3. (क) दर्शाइए कि $f(x) = x^3$ रीमान समाकलनीय अंतराल [0, 1] पर रीमान समाकलनीय है। व्युत्पत्ति कीजिए कि $\int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}$ है। 5

(ख) दर्शाइए कि श्रेणी $\sum \frac{\sin(n^3 x)}{n^{5/2}}$ अंतराल $[0, \infty[$ पर एकसमानतः अभिसारी है। 5

(ग) सीमा की परिभाषा का उपयोग करते हुए सिद्ध कीजिए

कि $\left(\frac{(\sin 2n + \cos 3n)}{n}\right)_{n\in\underline{\mathbf{N}}}$ शून्य में अभिसरित

होता है। 5

4. (क) समुच्चय $S = \left\{\frac{n-1}{n} : n \in \mathbf{N}\right\}$ के निम्निष्ठ और

उच्चिष्ठ ज्ञात कीजिए, यदि उनका अस्तित्व है। 5

(ख) जाँच कीजिए कि श्रेणी $\sum\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2} . \ 3^n$

अभिसारी है या नहीं। 5

(ग) मान लीजिए कि : 5

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x-2}, & x \neq 2 \\ 1 \quad , & x = 2 \end{cases}$$

के रूप में फलन $f$ परिभाषित है। क्या $x = 2$ पर $f$ संतत है ? यदि नहीं, तो असंततता की प्रकृति ज्ञात कीजिए तथा यदि संभव है, तो $f$ को संतत बनाने के लिए उसे पुन:परिभाषित कीजिए।

5. (क) निम्नलिखित को सिद्ध कीजिए : 5

(i) $$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = 1$$

(ii) $$\lim_{x \to \infty} \frac{x + 2\sin x}{x + 2\cos x} = 1$$

(ख) $$\lim_{n \to \infty} \left[ \frac{1}{\sqrt{n^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 - 1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 - 2^2}} + \dots\dots\dots + \frac{1}{\sqrt{n^2 - (n-1)^2}} \right]$$ ज्ञात करने के लिए, कौशी समाकल परीक्षण का अनुप्रयोग कीजिए। 5

(ग) निम्नलिखित को सिद्ध या असिद्ध कीजिए : 5

"परिमेय संख्याओं का समुच्चय गणनीय है।"

6. (क) दर्शाइए कि श्रेणी $\Sigma a_n$ अपसारी है, जहाँ

$$a_n = \frac{n^2 + n + 2}{n^2 - n + 2}$$ है। 4

(ख) दर्शाइए कि समीकरण $2x^3 - 18x + 7 = 0$ के अंतराल [–1, 1] में दो भिन्न-भिन्न वास्तविक मूल नहीं हैं। 5

(ग) निम्नलिखित कथनों को सिद्ध या असिद्ध कीजिए : 6

(i) अनुक्रम $\left(\frac{\cos n}{n}\right)_{n \in \underline{\underline{\mathbf{N}}}}$ अभिसारी है।

(ii) प्रत्येक अनुक्रम, जो एकदिष्ट नहीं है, अपसारी होता है।

7. (क) सिद्ध कीजिए कि $\sqrt{10}$ एक परिमेय संख्या नहीं है। 5

(ख) $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(n!)^3}{(3n)!}\right]^{\frac{1}{n}}$ का मान निकालिए। 5

(ग) मान लीजिए कि $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$ डिरिचलेट फलन है, जो : 5

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{यदि } x \in [0,1] \text{ परिमेय है} \\ 0, & \text{यदि } x \in [0,1] \text{ अपरिमेय है} \end{cases}$$

द्वारा परिभाषित है। जाँच कीजिए कि क्या यह फलन $f$ रीमान समाकलनीय है ?

8. (क) सिद्ध कीजिए कि $1 - x > e^{-x}$ है, यदि $x > 0$ है। 5

(ख) $\sin x, \forall x \in \mathbf{R}$ के लिए मैक्लॉरिन श्रेणी ज्ञात कीजिए। 5

(ग) अनुक्रम $(f_n)_{n \in \underline{\mathbf{N}}}$ के लिए; जहाँ $f_n : [0,1] \to \underline{\mathbf{R}}$,

$f_n(x) = \dfrac{\cos 2nx}{n^3}$ है; जाँच कीजिए कि यह [0, 1]

पर एकसमानतः अभिसारी है या नहीं। 5

× × × × ×