No. of Printed Pages : 23 **BMTC–134**

# B. A. (GENERAL)/B. SC. (GENERAL)

# (BAG/BSCG)

## Term-End Examination

## June, 2025

### BMTC-134 : ALGEBRA

*Time : 3 Hours* *Maximum Marks : 100*

---

***Note :*** *(i) There are eight questions in this paper.*

*(ii) Question No. 8 is compulsory.*

*(iii) Do any **six** questions from Q. No. **1** to Q. No. **7**.*

*(iv) Show your rough work at the bottom or on the right side of the page.*

*(v) Use of calculators is not allowed.*

---

1. (a) Define a cyclic group. Give an example of a finite, non-cyclic group. (You don't need to prove that your example is a group. You have to only prove that it is non-cyclic.) 3

(b) State a criterion for checking whether a non-empty subset H of a group G is a subgroup of G. Use the criterion to check whether :

$$\mathrm{H} = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ c & d & 0 \end{bmatrix} \middle| \, a, b, c, d \in \mathbb{C} \right\}$$

is subgroup of the group of 2 × 3 matrices over $\mathbb{C}$ under addition. 2

(c) Write the permutation $(1\ 3\ 4\ 2) \circ (2\ 6\ 9) \in S_{10}$ in the two-line format. 2

(d) State Lagrange's theorem. What are the possible orders of subgroups of a group of order 18 ? 2

(e) We define $\phi : \mathbf{R}[x] \to \mathbf{R}$ by $\phi\left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right) = a_0$. Check whether $\phi$ is a sujective ring homomorphism or not. If it is, find the kernel of the homomorphism and a minimum set of generators of this ideal. If $\phi$ is not a homomorphism, define a homomorphism from $\mathbf{R}[x]$ onto $\mathbf{R}$. 6

2. (a) Let $A = \begin{bmatrix} 0 & r \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in GL_2(\mathbb{C})$. Apply the principle of mathematical induction to show that $A^{2n} = \begin{bmatrix} r^n & 0 \\ 0 & r^n \end{bmatrix}$, and deduce that $A^{2n+1} = \begin{bmatrix} 0 & r^{n+1} \\ r^n & 0 \end{bmatrix}$ for all $n \in \mathbf{N}$.

Further, show that, if o(A) is finite, then o(A) is even. 6

(b) Show that $x+2$ and $x+4$ are coprime in $\mathbf{Q}[x]$. 2

(c) State the Mod $p$ irreducibility test for a polynomial in $\mathbf{Z}[x]$. Use the test to show that the polynomial $x^3 + 18x + 27$ is irreducible in $\mathbf{Q}[x]$. 7

3. (a) Define a reflexive relation, a symmetric relation and a transitive relation on a non-empty set S.

Consider the set $\mathbf{N}$ and the relation ~, defined by $a \sim b$ for $a, b \in \mathbf{N}$ if $a = b^k$ for some $k \in \mathbf{N}$.

Check whether ~ is reflexive, symmetric and transitive. Is it an equivalence relation ? Justify your answer. 5

(b) (i) Let G be a group and H be its subgroup. Define a left coset of H in G corresponding to an element $\alpha \in G$. $1\frac{1}{2}$

(ii) Let $G = S_4$ and H = {1, (1 2 3 4), (1 3) (2 4), (1 4 3 2)}. Compute the left coset $\alpha H$, where $\alpha = (12)$. $1\frac{1}{2}$

(c) Find all the proper ideals of $\mathbf{Z}/70\mathbf{Z}$. Further, which of these are maximal ideals and why ? 5

(d) Give an example, with justification, of a subgroup of $S_3$ which is not normal in $S_3$. 2

4. (a) (i) Show, by a rough sketch, a rotational symmetry of the character 'N' of the English alphabet, specifying the point about which it is rotated and the angle of rotation. $1\frac{1}{2}$

(ii) Show, by a rough sketch, a reflection symmetry of the character 'T' of the English alphabet, specifying the line about which it is reflected. $1\frac{1}{2}$

(b) How many elements does the group $A_n$ have, for $n \in \mathbf{N}, n \geq 2$ ? List all the elements of $A_4$. 4

(c) Check whether or not :

$$R = \left\{ \begin{bmatrix} a & a \\ a & a \end{bmatrix} \middle| a \in \mathbf{Q} \right\}$$

is a commutative ring with unity under matrix addition and matrix multiplication. If R is a ring, find char R. If R is not a ring, find the characteristic of any ring containing R.

8

5. (a) Prove that the 3 cycles in $A_n$ generate $A_n$ for $n \geq 3$. 6

(b) Find the quotient field of $\mathbf{Z}[\sqrt{5}]$. 3

(c) Let $S = \{1, 2, 3, 4\}$, and * be the binary operation on S defined by $a * b = b$. Compute the Cayley table for $(S, *)$. Is * commutative ? Is * associative ? Justify your answers. 6

6. (a) State the Unique Factorisation Theorem for polynomials over a field. Further, show that $\bar{6}x^2 + \bar{3}x + \bar{5}$ factors as $(\bar{6}x + \bar{2})(x + \bar{6})$ and as $(\bar{3}x + \bar{1})\,(\bar{2}x + \bar{5})$ in $\mathbf{Z}_7$. Explain why this doesn't contradict the said theorem. 4

(b) For $a, b \in \mathbf{Z}$, show that :

(i) $a\mathbf{Z} \cap b\mathbf{Z} = \ell\mathbf{Z}$, where $\ell = [a, b]$, the l.c.m. of $a$ and $b$.

(ii) $a\mathbf{Z}+b\mathbf{Z}=h\mathbf{Z}$, where $h$ = $(m, n)$ is the g.c.d. of $a$ and $b$.

Further, find $3\mathbf{Z}\cap 4\mathbf{Z}$ and $6\mathbf{Z}+15\mathbf{Z}$. 7

(c) Show that G/H is an infinite group, where $\mathrm{G}=\mathrm{GL}_2(\mathbf{R})$ and $\mathrm{H}=\mathrm{SL}_2(\mathbf{R})$. 4

7. (a) (i) Give an example, with justification, of a ring R and an element $a \in \mathrm{R}$ such that $a$ is neither a unit nor a zero divisor of R. 2

(ii) Give an example, with justification, of a ring R and an element $a \in \mathrm{R}$ such that $a$ is a zero divisor of R which is not nilpotent. 2

(b) If I is an ideal of a ring R, show that :

$$I[x] = \left\{ \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \mid a_i \in I,\ n \in \mathbf{N} \cup \{0\} \right\}$$

is an ideal of R[$x$]. Further, will I[$x$] be a principal ideal if R is a PID ? Justify your answer. 4

(c) Show that :

$$G = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \middle| m \in \mathbf{Z} \right\}$$

is a subgroup of $GL_2(\mathbf{R})$. Further, check whether or not $\psi : \mathbf{Z} \to G$, defined by $\psi(n) = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, is a group isomomorphism, where $\mathbf{Z}$ is the group of integers under addition. 5

(d) Show that for $n \in \mathbf{N}$, and for every $d \mid n, \mathrm{D}_{2n}$ has a subgroup of order $d$. 2

8. Which of the following statements are true, and which are false ? Justify your answers with a short proof or a counter example, whichever is appropriate. Marks will only be given for proper justification : 10

(i) Every non-abelian group has at least one proper subgroup which is not normal.

(ii) If a group has elements of order three and two, it has an element of order six.

(iii) Every subring of a non-commutative ring is non-commutative.

(iv) If S is a ring and R is a subring of S and S has zero divisors, then R also has zero divisors.

(v) If every element of a group has infinite order, the group has no proper subgroups of finite index.

# BMTC–134

## कला स्नातक (सामान्य) विज्ञान स्नातक (सामान्य)

## (बी. ए. जी./बी. एस.-सी. जी.)

## सत्रांत परीक्षा

## जून, 2025

## बी.एम.टी.सी.-134 : बीजगणित

*समय : 3 घण्टे* *अधिकतम अंक : 100*

---

**नोट :** (i) *इस प्रश्न-पत्र में 8 प्रश्न हैं।*

(ii) *प्रश्न संख्या **8** हल करना अनिवार्य है।*

(iii) *प्रश्न संख्या **1** से **7** तक से कोई भी छः प्रश्न कीजिए।*

(iv) *अपना रफ कार्य पृष्ठ के नीचे या दायीं ओर दिखाइए।*

(v) *कैल्कुलेटर प्रयोग करने की अनुमति नहीं है।*

---

1. (क) एक चक्रीय समूह को परिभाषित कीजिए। एक परिमित अचक्रीय समूह का उदाहरण दीजिए। (आपको आपका उदाहरण समूह स्थापित करना जरूरी नहीं है। अचक्रीय स्थापित करना पर्याप्त है।) 3

(ख) यह जाँचने के लिए एक मानदण्ड बताइए कि क्या समूह G का एक अरिक्त उपसमूह H, G का उपसमूह है। यह जाँचने के लिए मानदण्ड का उपयोग कीजिए कि क्या :

$$\mathrm{H} = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ c & d & 0 \end{bmatrix} \middle| \, a, b, c, d \in \mathbb{C} \right\}$$

योग के सापेक्ष $\mathbb{C}$ पर $2 \times 3$ आव्यूहों के समूह का उपसमूह है। 2

(ग) क्रमचय $(1\ 3\ 4\ 2) \circ (2\ 6\ 9) \in \mathrm{S}_{10}$ को दो-पंक्ति रूप में लिखिए। 2

(घ) लैग्रान्ज प्रमेय बताइए। एक कोटि 18 वाले समूह के उपसमूहों की कोटियाँ क्या हो सकती हैं ? 2

(ङ) हम $\phi : \mathbf{R}[x] \to \mathbf{R}$ को $\phi\left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right) = a_0$ द्वारा परिभाषित करते हैं। जाँच कीजिए कि $\phi$ एक आच्छादक वलय समाकारिता है या नहीं। यदि हाँ, तो समाकारिता का अष्टि और उस गुणजावली को जनित करने वाला न्यूनतम समुच्चय भी ज्ञात कीजिए। यदि $\phi$ समाकारिता नहीं है, तो $\mathbf{R}[x]$ से $\mathbf{R}$ पर एक आच्छादक समाकारित परिभाषित कीजिए। 6

2. (क) मान लीजिए $A = \begin{bmatrix} 0 & r \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in GL_2(\mathbb{C})$ । गणितीय आगमन विधि का प्रयोग करके दिखाइए कि $A^{2n} = \begin{bmatrix} r^n & 0 \\ 0 & r^n \end{bmatrix}$ और आगे यह भी दिखाइए कि $A^{2n+1} = \begin{bmatrix} 0 & r^{n+1} \\ r^n & 0 \end{bmatrix}$ सभी $n \in \mathrm{N}$ के लिए। यह भी दिखाइए कि, यदि o(A) परिमित है, तो o(A) सम होगा। 6

(ख) दिखाइए कि $x+2$ और $x+4$ $\mathbf{Q}[x]$ में असहभाज्य हैं। 2

(ग) $\mathbf{Z}[x]$ में बहुपद के लिए Mod $p$ अखण्डनीयता परीक्षण बताइए। इस परीक्षण का प्रयोग करके दिखाइए कि $x^3+18x+27$ $\mathbf{Q}[x]$ में अखण्डनीय है। 7

3. (क) एक अरिक्त समुच्चय S पर स्वतुल्य, सममित और संक्रामक सम्बन्धों को परिभाषित कीजिए। समुच्चय $\mathbf{N}$ पर $a \sim b$ , $a, b \in \mathbf{N}$ यदि $a = b^k$ द्वारा परिभाषित सम्बन्ध लीजिए।

जाँच कीजिए कि ~ स्वतुल्य, सममित और संक्रामक है। क्या यह एक तुल्यता सम्बन्ध है ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। 5

(ख) (i) मान लीजिए G एक समूह है और H उसका उपसमूह है। G में एक अवयव $\alpha \in G$ के संगत H का विषम सहसमुच्चय परिभाषित कीजिए। $1\frac{1}{2}$

(ii) मान लीजिए $G = S_4$ और $H = \{1, (1\ 2\ 3\ 4), (1\ 3)\ (2\ 4), (1\ 4\ 3\ 2)\}$। विषम उपसमुच्चय $\alpha H$ परिकलित कीजिए, जहाँ $\alpha = (1\ 2)$। $1\frac{1}{2}$

(ग) $\mathbf{Z}/70\mathbf{Z}$ की सभी उचित गुणजावलियाँ निकालिए। आगे इनमें से कौन–सी उच्चिष्ठ गुणजावलियाँ हैं और क्यों ? 5

(घ) पुष्टि के साथ $S_3$ के एक उपसमूह का उदाहरण दीजिए जो $S_3$ में प्रसामान्य न हो। 2

4. (क) (i) एक सरल चित्र द्वारा अंग्रेजी वर्णमाला के वर्ण 'N' की एक घूर्णन सममिति बताइए। घूर्णन का कोण और बिन्दु, जिसके प्रति घूर्णित किया गया है, यह भी बताइए। $1\frac{1}{2}$

(ii) एक सरल चित्र द्वारा अंग्रेजी वर्णमाला के वर्ण 'T' की एक परावर्तन सममिति दिखाइए। सममित–रेखा भी बताइए। $1\frac{1}{2}$

(ख) $n \in \mathbf{N}, n \geq 2$ के लिए समूह $\mathrm{A}_n$ में कितने अवयव हैं ? $\mathrm{A}_4$ के सभी अवयवों की सूची बनाइए। 4

(ग) जाँच कीजिए कि:

$$\mathrm{R} = \left\{ \begin{bmatrix} a & a \\ a & a \end{bmatrix} \middle| a \in \mathbf{Q} \right\}$$

आव्यूह जोड़ और गुणा के सापेक्ष एक क्रमविनिमेय वलय है या नहीं। यदि R एक वलय है, तो char R निकालिए। यदि R वलय नहीं है, तो R को आविष्ट करने वाली किसी भी वलय का अभिलक्षाणिक निकालिए। 8

5. (क) दिखाइए कि $A_n$ में आविष्ट 3–चक्र, $n \geq 3$ के लिए, $A_n$ को जनित करते हैं। 6

(ख) $\mathbf{Z}[\sqrt{5}]$ का भागफल क्षेत्र निकालिए। 3

(ग) मान लीजिए $S = \{1, 2, 3, 4\}$ और *, $a * b = b$ द्वारा परिभाषित S पर एक द्विआधारी संक्रिया है। (S, *) के लिए एक कैली तालिका परिकलित कीजिए। क्या * क्रमविनिमेय है ? क्या * साहचर्य है ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। 6

6. (क) एक क्षेत्र पर बहुपदों के लिए अद्वितीय गुणनखंडन प्रमेय बताइए। आगे दिखाइए कि $\mathbf{Z}_7$ में $\bar{6}x^2 + \bar{3}x + \bar{5}$ $(\bar{6}x + \bar{2})(x + \bar{6})$ और $(\bar{3}x + \bar{1})(\bar{2}x + \bar{5})$ दो गुणनखंडन हैं। क्या यह उपर्युक्त प्रमेय का अंतर्विरोध करता है, समझाइए। अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। 4

(ख) $a, b \in Z$ के लिए दर्शाइए कि :

(i) $a\mathbf{Z} \cap b\mathbf{Z} = \ell\mathbf{Z}$ है, जहाँ $\ell = [a, b]$ है, जो $a$ और $b$ का l.c.m. है।

(ii) $a\mathbf{Z} + b\mathbf{Z} = h\mathbf{Z}$ है, जहाँ $h = (m, n)$ है, जो $a$ और $b$ का g.c.d. है।

आगे $3\mathbf{Z} \cap 4\mathbf{Z}$ और $6\mathbf{Z} + 15\mathbf{Z}$ निकालिए। 7

(ग) दिखाइए कि G/H एक अनंत समूह है, जहाँ $G = GL_2(\mathbf{R})$ और $H = SL_2(\mathbf{R})$ । 4

7. (क) (i) पुष्टि के साथ एक वलय R और एक अवयव $a \in R$ का उदाहरण दीजिए जिसके लिए $a$ न तो शून्य विभाजक है न मात्रक है। 2

(ii) पुष्टि के साथ एक वलय R और एक अवयव $a \in R$ का उदाहरण दीजिए जिसके लिए $a$ शून्य भाजक और $a$ शून्य भावी नहीं है। 2

(ख) यदि I एक वलय R की गुणजावली है, तो दिखाइए कि :

$$\mathrm{I}[x] = \left\{ \sum_{i=0}^{n} a_j x^i \mid a_i \in \mathrm{I},\ n \in \mathbf{N} \cup \{0\} \right\}$$

R[$x$] की गुणजावली है। आगे, क्या जब R[$x$] PID है तो I[$x$] मुख्य गुणजावली होगी ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। 4

(ग) दिखाइए कि :

$$\mathrm{G} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \middle| m \in \mathbf{Z} \right\}$$

$\mathrm{GL}_2(\mathbf{R})$ का उपसमूह है। आगे जाँच कीजिए कि $\psi : \mathbf{Z} \to \mathrm{G}$, जो $\psi(n) = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ द्वारा परिभाषित है, जहाँ $\mathbf{Z}$ जोड़ के सापेक्ष समूह है, एक समूह तुल्यकारिता है या नहीं। 5

(घ) दिखाइए कि प्रत्येक $n \in \mathbf{N}$ के लिए और प्रत्येक $d \in \mathbf{N}$, $d \mid n, \mathrm{D}_{2n}$ में कोटि $d$ का एक उपसमूह है। 2

8. निम्नलिखित कथनों में से कौन-से कथन सत्य और कौन-से कथन असत्य हैं ? अपने उत्तर को एक लघु उपपत्ति या प्रति-उदाहरण, जो भी उपयुक्त हो, के रूप में दीजिए। 10

उचित पुष्टिकरण के साथ ही अंक दिये जाएँगे :

(i) प्रत्येक अनाबेली समूह का कम-से-कम एक उचित उपसमूह है जो प्रसामान्य नहीं है।

(ii) यदि एक समूह में कोटि तीन और दो वाले अवयव हैं, तो कोटि छः वाला अवयव भी है।

(iii) अक्रमविनिमेय वलय की प्रत्येक उपवलय अक्रमविनिमेय है।

(iv) यदि वलय R वलय S की उपवलय है और S में शून्य का भाजक है, तो R में भी शून्य का भाजक है।

(v) यदि एक समूह के प्रत्येक अवयव की कोटि अनन्त है, तो उस समूह में परिमित सूचकांक वाला कोई भी उचित उपसमूह नहीं है।

× × × × ×