No. of Printed Pages : 20 **BMTE–141**

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)

(BSCG/BAG/BSCM/BAM/BSCFMT)

Term-End Examination

June, 2025

BMTE-141 : LINEAR ALGEBRA

Time : 3 Hours *Maximum Marks : 100*

Note : (*i*) *There are eight questions in this paper.*

(*ii*) *The* ***eighth*** *question is compulsory.*

(*iii*) *Do any* ***six*** *questions from Question Nos.* ***1*** *to* ***7****.*

(*iv*) *Use of calculators is not allowed.*

(*v*) *Do your rough work in a clearly identifiable part of the bottom of the same page or in the side of the page only.*

1. (a) Define the adjoint of a matrix. Write down the adjoint of the matrix : 2

$$\begin{bmatrix} 1 & 1+i & -1+2i \\ i & 2i & -3i \end{bmatrix}$$

(b) Check whether the set of vectors $\left\{\frac{i-k}{\sqrt{2}}, \frac{i-2j+k}{\sqrt{6}}, \frac{i+j+k}{\sqrt{3}}\right\}$ is an orthonormal set. 4

(c) Let A = $\{(a, b, 0) \mid a, b \in \mathbf{R}\}$ and B = $\{(0, x, y) \mid x, y \in \mathbf{R}\}$. Prove that $A + B = \mathbf{R}^3$. Is $\mathbf{R}^3$ a direct sum of A and B ? Justify your answer. 4

(d) Is the matrix :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

in Row Reduced Echelon form ? Is it in Row Reduced form ? Justify your answer. If it is not in Row Reduced Echelon form, use row operations to reduce it to Row Reduced Echelon form.

3

(e) Find the coordinates of the polynomial $2x^2 - x + 1$ with respect to the ordered basis $\{1 + x, x, 1 + x + x^2\}$. 2

2. (a) Use Row Reduction to find the rank and the nullity of the matrix : 5

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 4 \\ 1 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

(b) Check whether the following system of equations can be solved using Cramer's rule : 5

$$2x + 2y + z = 1$$

$$x + 3y - z = -3$$

$$x - y - z = 1$$

If yes, then solve the system of equations using Cramer's rule. If no, then solve the system of equations using Gaussian elimination.

(c) Suppose U and W are subspaces of V, dim (U) = 7, dim (W) = 5, dim (V) = 9. Find the possible values of dim (U ∩ W). 3

(d) State the Cauchy-Schwarz inequality for inner product spaces. Verify the inequality for vectors $u = (-1, 2i, i)$ and $v = (1, -1 + i, i) \in \mathbf{C}^3$. 2

3. (a) Find the rank and signature for each of the forms $x_1^2 - x_2^2 - x_4^2$ and $x_1^2 - x_3^2 - x_4^2$. Are these forms equivalent ? Justify your answer. 3

(b) Check whether or not the matrix :

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 4 \\ -4 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

is diagonalisable. If it is diagonalisable, find a matrix P and a diagonal matrix D such that $PAP^{-1} = D$. If it is not diagnonalisable, find its adjugate. 8

(c) For $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbf{R}^3$ define $\langle , \rangle : \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ by

$$< x, y > = 3x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3.$$

Check whether $\langle , \rangle$ defines an inner product on $\mathbf{R}^3$. 4

4. (a) Using row reduction, find the inverse of the following matrix : 6

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

(b) Find the orthogonal canonical reduction of the quadratic form : 9

$$x^2 - y^2 + z^2 + 2xy - 2xz + 2yz$$

Also, find its principal axes.

5. (a) Prove that the set :

$$W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 + x_2 = 2x_4\}$$

is a subspace of $\mathbf{R}^4$. Find a basis of W. Also, find the dimension of W. 5

(b) (i) Check that, the map $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ given by T $((x, y)) = (ax + by, cx + dy)$ is a linear operator.

(ii) Show that the projection on the line $y = mx,\ m \neq 0$ is given by the linear map : 5

$$P(x, y) = \left(\frac{x + ym}{m^2 + 1}, \frac{mx + ym^2}{m^2 + 1}\right).$$

(c) Let $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ be defined by :

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-x_2, x_1, -x_4, x_3)$$

Check that $T^4 = I$. Also, find the minimal polynomial of T. 5

6. (a) Consider the linear operator $T : \mathbf{C}^4 \to \mathbf{C}^4$, defined by :

$$T(z_1, z_2, z_3, z_4) = (-iz_2, iz_1, -iz_4, z_3)$$

Find T* (w_1, w_2, w_3, w_4), where $w_i \in \mathbf{C} \forall$ i = 1, 2, 3, 4 without using the matrix form of T. Check whether T is self-adjoint under the standard inner product on $\mathbf{C}^4$. Further, check whether T is unitary without using the matrix form of T. 6

(b) Let $\mathbf{P}_4$ be the vector space over $\mathbf{R}$ of the set of all polynomials of degree at most four. Show that $1 + x + x^2$ and 1 + x are linearly independent in $\mathbf{P}_4$. Find a basis of $\mathbf{P}_4$ that contains the polynomials $1 + x + x^2$ and 1 + x. 4

(c) Consider $M_n(\mathbf{C})$ as a vector space over $\mathbf{R}$. Let V_1 be the subspace of $n \times n$ Hermitian matrices and V_2 be the subspace of $n \times n$ skew-Hermitian matrices. Show that $V_1 + V_2 = M_n(\mathbf{C})$. Is $M_n(\mathbf{C}) = V_1 \oplus V_2$? Justify your answer. 5

7. (a) The following equation gives the reaction of metallic tin with concentrated nitritc acid :

$$Sn + HNO_3 \rightarrow H_2SnO_3 + NO_2 + H_2O$$

Balance the chemical equation by setting up a suitable linear system of equations and solving it. (Sn - chemical symbol for tin). 8

(b) Let $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ be defined by $T(x, y) = (x, y, x + y)$ and $S : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ be defined $S(x, y, z) = (x + z, y - z)$. Let B_1 and B_2 be the standard bases of $\mathbf{R}^2$ and $\mathbf{R}^3$, respectively. Check that : 7

$$[T \circ S]_{B_2}^{B_2} = [T]_{B_2}^{B_1} . [S]_{B_1}^{B_2} .$$

8. Which of the following statements are true and which are false ? Justify your answer with short proof or a counter-example : 10

(a) If a matrix is diagonalisable, its characteristic polynomial must have distinct roots.

(b) If S and T are $n \times n$ invertible square matrices, then S + T is also an invertible square matrix.

(c) If A is a square matrix such that $A^2 = A$, then zero is an eigen value of A.

(d) There exist vectors u and v in an inner product space such that $\|u\| = 2$, $\|v\| = 7$, $\|u+v\| = 8$ and $\|u-v\| = 6$.

(e) If $\{v_1, v_2, v_3\}$ is a linearly independent set and α_1, α_2 and α_3 are non-zero scalars, then $\{\alpha_1 v_1, \alpha_2 v_2, \alpha_3 v_3\}$ is also a linearly independent set.

BMTE–141

स्नातक उपाधि कार्यक्रम (बी. डी. पी.)

(बी. एस-सी. जी./बी. ए. जी./बी. एस-सी. एम./ बी. ए. एम./बी. एस-सी. एफ. एम. टी.)

सत्रांत परीक्षा

जून, 2025

बी.एम.टी.ई.-141 : रैखिक बीजगणित

समय : 3 घण्टे *अधिकतम अंक : 100*

नोट : *(i)* *इस प्रश्न पत्र में आठ प्रश्न हैं।*

(ii) ***आठवाँ*** *प्रश्न करना अनिवार्य है।*

(iii) *प्रश्न संख्या **1** से **7** तक कोई भी **छः** प्रश्न कीजिए।*

(iv) *कैलकुलेटर के प्रयोग की अनुमति नहीं है।*

---

1. (क) एक आव्यूह के सहखण्डज को परिभाषित कीजिए। आव्यूह : 2

$$\begin{bmatrix} 1 & 1+i & -1+2i \\ i & 2i & -3i \end{bmatrix}$$

का सहखण्डज लिखिए।

(ख) जाँच कीजिए कि सदिशों का समुच्चय $\left\{\frac{i-k}{\sqrt{2}}, \frac{i-2j+k}{\sqrt{6}}, \frac{i+j+k}{\sqrt{3}}\right\}$ प्रसामान्य लाम्बिक है या नहीं। 4

(ग) मान लीजिए $A = \{(a, b, 0) \mid a, b \in \mathbf{R}\}$ और $B = \{(0, x, y) \mid x, y \in \mathbf{R}\}$। सिद्ध कीजिए कि $A + B = \mathbf{R}^3$। क्या $\mathbf{R}^3$ A और B का अनुलोम योगफल है ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। 4

(घ) क्या आव्यूह :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

पंक्ति समानीत सोपानक रूप में है ? क्या यह पंक्ति समानीत रूप में है ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। यदि यह आव्यूह पंक्ति सोपानिक समानीत रूप में नहीं है, तो पंक्ति संक्रियाओं को प्रयोग करके आव्यूह को पंक्ति समानीत सोपानिक रूप में समानीत कीजिए। 3

(ङ) क्रमित आधार $\{1 + x, x, 1 + x + x^2\}$ के सापेक्ष बहुपद $2x^2 - x + 1$ के निर्देशांक ज्ञात कीजिए। 2

2. (क) पंक्ति समानयन द्वारा आव्यूह : 5

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 4 \\ 1 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

की कोटि और शून्यता निकालिए।

(ख) जाँच कीजिए कि निम्नलिखित समीकरण निकाय को क्रेमर नियम से हल किया जा सकता है : 5

$$2x + 2y + z = 1$$

$$x + 3y - z = -3$$

$$x - y - z = 1$$

यदि हाँ, तो समीकरण निकाय को क्रेमर नियम से हल कीजिए। यदि नहीं, तो गाउसीय निराकरण से हल कीजिए।

(ग) मान लीजिए U और W, V की उपसमष्टियाँ हैं और विमा (U) = 7, विमा (W) = 5, विमा (V) = 9। विमा ($U \cap W$) के संभावित मान निकालिए। 3

(घ) आन्तर गुणन समष्टियों के लिए कौशी–श्वार्ज असमिका बताइए। सदिशों $u = (-1, 2i, i)$ और $v = (1, -1, + i, i) \in \mathbf{C}^3$ के लिए असमिका को सत्यापित कीजिए। 2

3. (क) समघात $x_1^2 - x_2^2 - x_4^2$ और $x_1^2 - x_3^2 - x_4^2$ के कोटि और चिह्नक निकालिए। क्या ये समघात तुल्य हैं ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। 3

(ख) जाँच कीजिए कि आव्यूह :

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 4 \\ -4 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

विकर्णनीय है या नहीं। यदि विकर्णनीय है, तो आव्यूह P और और विकर्ण आव्यूह D निकालिए जिसके लिए $PAP^{-1} = D$ । यदि यह विकर्णनीय नहीं है, तो उसके सहयुग्मी ज्ञात कीजिए। 8

(ग) $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbf{R}^3$ के लिए $\langle , \rangle : \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ को $\langle x, y \rangle = 3x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$ द्वारा परिभाषित कीजिए। जाँच कीजिए कि $\langle , \rangle, \mathbf{R}^3$ पर आन्तर गुणन फलन परिभाषित करता है या नहीं। 4

4. (क) पंक्ति समानयन का प्रयोग करके निम्नलिखित आव्यूह का व्युत्क्रम निकालिए : 6

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

(ख) द्विघाती समघात $x^2 - y^2 + z^2 + 2xy - 2xz + 2yz$ का लाम्बिक विहित समानयन निकालिए। इसके मुख्य अक्ष भी निकालिए। 9

5. (क) सिद्ध कीजिए कि समुच्चय :

$$W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 + x_2 = 2x_4\}$$

$\mathbf{R}^4$ का उपसमष्टि है। W का आधार निकालिए। W की विमा भी ज्ञात कीजिए। 5

(ख) (i) जाँच कीजिए कि $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, जो $T((x, y)) = (ax + by, cx + dy)$ द्वारा परिभाषित किया गया है, एक रैखिक संकारक है।

(ii) दिखाइए कि रेखा $y = mx$, $m \neq 0$ पर प्रक्षेप रैखिक फलन :

$$P(x, y) = \left(\frac{x + ym}{m^2 + 1}, \frac{mx + ym^2}{m^2 + 1}\right)$$

द्वारा दिया गया है। 5

(ग) मान लीजिए संकारक $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$:

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-x_2, x_1, -x_4, x_3)$$

द्वारा परिभाषित किया गया है। जाँच कीजिए कि $T^4 = I$ । आगे T का अल्पिष्ठ बहुपद निकालिए। 5

6. (क) रैखिक संकारक $T : \mathbf{C}^4 \to \mathbf{C}^4$ लीजिए जो :

$$T(z_1, z_2, z_3, z_4) = (-iz_2, iz_1, -iz_4, z_3)$$

द्वारा परिभाषित है। T का आव्यूह रूप का न प्रयोग करते हुए T* (w_1, w_2, w_3, w_4) निकालिए, जहाँ $w_i \in \mathbf{C} \, \forall \, i = 1, 2, 3, 4$। जाँच कीजिए कि T की $\mathbf{C}^4$ पर मानक आंतर गुणनफलन के सापेक्ष T स्वसंलग्न है। T का आव्यूह रूप का न प्रयोग करते हुए यह भी जाँच कीजिए कि T एकिक है। 6

(ख) मान लीजिए $\mathbf{P}_4$ $\mathbf{R}$ पर अधिक से अधिक कोटि चार वाले बहुपदों की सदिश समष्टि है। दिखाइए कि $1+x+x^2$ और $1+x$ रैखिकत: स्वतंत्र हैं। $\mathbf{P}_4$ के लिए बहुपदों $1+x+x^2$ और $1+x$ आविष्ट करने वाला एक आधार निकालिए। 4

(ग) $\mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ को $\mathbf{R}$ पर सदिश समष्टि के तौर पर लीजिए। मान लीजिए कि V_1 $n \times n$ हर्मिटी आव्यूहों की सदिश समष्टि है और V_2 $n \times n$ विषम-हर्मिटी आव्यूहों की सदिश समष्टि है। दिखाइए कि $\mathrm{V}_1 + \mathrm{V}_2 = \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ । क्या $\mathrm{M}_n(\mathbf{C}) = \mathrm{V}_1 \oplus \mathrm{V}_2$? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। 5

7. (क) निम्नलिखित समीकरण धात्विक टिन की सांद्रित नाइट्रिक अम्ल के साथ प्रतिक्रिया को निरूपित करता है :

$$\mathrm{Sn} + \mathrm{HNO_3} \rightarrow \mathrm{H_2SnO_3} + \mathrm{NO_2} + \mathrm{H_2O}$$

उचित रैखिक समीकरणों का निर्माण करके इस समीकरण को संतुलित कीजिए। (Sn – टिन का रासायनिक प्रतीक)। 8

(ख) मान लीजिए $T:\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3 : T(x, y) = (x, y, x+y)$ द्वारा परिभाषित है और $S:\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$: $S(x, y, z) = (x+z, y-z)$ द्वारा परिभाषित है। मान लीजिए B_1 और B_2 क्रमशः $\mathbf{R}^2$ और $\mathbf{R}^3$ के मानक आधार हैं। जाँच कीजिए कि : 7

$$[T \circ S]_{B_2}^{B_2} = [T]_{B_2}^{B_1} . [S]_{B_1}^{B_2}$$

8. निम्नलिखित कथनों में से कौन–से कथन सत्य और कौन–से कथन असत्य हैं ? अपने उत्तर की लघु उपपत्ति या प्रति–उदाहरण द्वारा पुष्टि कीजिए : 10

(क) यदि एक आव्यूह विकर्णनीय है, तो आव्यूह के अभिलाक्षिणक बहुपद के मूल भिन्न हैं।

(ख) यदि S और T $n \times n$ व्युत्क्रमणीय वर्गीय आव्यूह हैं, तो S + T भी एक व्युत्क्रमणीय वर्गीय आव्यूह है।

(ग) यदि A एक वर्गीय आव्यूह है जिसके लिए $A^2 = A$, तो शून्य A का आइगेने मान है।

(घ) एक आंतर गुणन समष्टि में ऐसे सदिश u और v हैं जिसके लिए $\|u\| = 2$, $\|v\| = 7$, $\|u+v\| = 8$ और $\|u-v\| = 6$ ।

(ङ) यदि $\{v_1, v_2, v_3\}$ एक रैखिकतः स्वतंत्र समुच्चय है और α_1, α_2 और α_3 शून्येतर अदिश हैं, तो $\{\alpha_1 v_1, \alpha_2 v_2, \alpha_3 v_3\}$ भी रैखिकतः स्वतंत्र समुच्चय है।

× × × × ×