No. of Printed Pages : 16 **BMTE–144**

BACHELOR OF ARTS (GENERAL)/ BACHELOR OF SCIENCE (GENERAL) (BAG/BSCG)

Term-End Examination

June, 2025

BMTE-144 : NUMERICAL ANALYSIS

Time : 3 Hours *Maximum Marks : 100*

Note : *Question No.* ***1*** *is compulsory. Do any* ***eight*** *questions from Q. Nos.* ***2*** *to* ***10****. Use of non-programmable/scientific calculator is allowed.*

---

1. Which of the following statements are true and which are false ? Give a short proof or a counter-example in support of your answer : 2×10=20

   (i) $\sum_{k=0}^{n-1} \Delta^2 f_k = \Delta f_n - \Delta f_0$

(ii) The eigen values of $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ are 1, 2, 5.

(iii) $x = 0$ is a fixed point for the function $f(x) = x^2 + 1$.

(iv) $\nabla = 1 + E^{-1}$

(v) The truncation error $R_{n+1}(x)$ is given by $f(x) - P_n(x) = \dfrac{(x - x_0)^{n+1}}{\underline{|n+1}} f^{(n)}(c)$, where $0 < c < x$.

(vi) Newton-Raphson's iteration formula for finding $\sqrt[3]{c}$, where $c > 0$, is $x_{n+1} = \dfrac{2x_n^3 - c}{3x_n^2}$.

(vii) The Taylor's series for $y(x) = \log(1 + x)$ is $x - \dfrac{x^2}{\underline{|2}} + \dfrac{x^3}{\underline{|3}} - \dfrac{x^4}{\underline{|4}} + \ldots\ldots - \dfrac{x^n}{\underline{|n}}$.

(viii) The SOR method is a generalisation of the Gauss-Seidel method.

(ix) The composite Simpson's rule for evaluation of the integral $\int_a^b f(x)\,dx$ requires the interval $[a,b]$ to be divided into an even number of subintervals of equal width.

(x) If a linear function is integrated using Trapezoidal rule, the error is minimum.

2. (*a*) Perform four interations of the Newton-Raphson method to find the smallest positive root of the equation $f(x) = x^3 - 5x + 1 = 0$. 5

(*b*) If $f(x) = \frac{1}{x^2}$, then find the divided difference $f[a, b, c, d]$. 5

3. (*a*) Find the inverse of the matrix :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

using LU decomposition method with $u_{11} = u_{22} = u_{33} = 1$. 5

(*b*) Use Regula-Falsi method to determine the root of the equation :

$$\cos x - xe^x = 0.$$

Take the initial approximation as $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ and perform two iterations of the method. 5

4. (a) Let $f(x) = \sin x$ be defined on the interval [1, 3]. Obtain the Lagrange's linear interpolating polynomial in this interval and find the bound on the truncation error. 5

(b) Find the number of iterations n of bisection method required to have an approximate root with absolute error $\leq 10^{-7}$ of the function $f(x) = 2x - \log_{10} x - 7$ in the interval [3.78, 3.79]. 5

5. (a) Using Runge-Kutta fourth order method with $h = 0.1$, find an

approximate value of $y(0.1)$ for the initial value problem : 5

$$y' = x^2 - y, \; y(0) = 1.$$

(b) Evaluate the integral $I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ using composite Simpson's rule. Hence obtain the approximate value of π. 5

6. (a) Solve the system of equations :

$$3x + 18y + 9z = 18$$

$$2x + 3y + 3z = 117$$

$$4x + y + 2z = 283$$

using Gauss elimination method. 5

(b) The area of a rectangular park is $x^3 - x^2 - 11x + 18$. If the length of the park is $(x - 2)$, then find its width using synthetic division method. 5

7. (a) Find the missing term in the following table : 5

x	$f(x)$
0	1
1	3
2	9
3	?
4	81

(b) Find the number of students with marks less than 45 using the following data : 5

Marks	**No. of Students**
30–40	31
40–50	42
50–60	51
60–70	35
70–80	31

8. (a) Estimate the eigen values of the matrix :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

using the Gerschgorin bounds. Also, draw the rough sketch of the region in which the eigen values lie. 5

(b) Use the Euler's method to solve numerically the initial value problem $y' = -y$; $y(0) = 1$ with $h = 0.01$ at $x = 0.04$. Also find the exact error. 5

9. (a) Find the Newton's backward difference interpolating polynomial for the following data : 5

x	y
0	1
1	0
2	1
3	10

(b) Using the third order Taylor's series method, find the solution of the initial value problem $y' = x - y^2$, $y(0) = 1$ at $x = 0.1$ taking $h = 0.1$. 5

10. (a) Calculate a bound for the truncation error in approximating $f(x) = \sin x$ by $1 - \frac{x^3}{\lfloor 3} + \frac{x^5}{\lfloor 5} - \frac{x^7}{\lfloor 7}$ where $-1 \le x \le 1$. 5

(b) Find an approximation to one of the roots of the equation :

$$P(x) = 2x^4 - 3x^2 + 3x - 4 = 0$$

using Birge-Vieta method starting with the initial approximation $x_0 = -2$. Perform only one iteration. 5

BMTE–144

कला स्नातक (सामान्य) /

विज्ञान स्नातक (सामान्य)

(बी. ए. जी./बी.एस.-सी.जी.)

सत्रांत परीक्षा

जून, 2025

बी.एम.टी.ई.-144 : संख्यात्मक विश्लेषण

समय : 3 घण्टे *अधिकतम अंक : 100*

नोट : *प्रश्न सं. **1** अनिवार्य है। प्रश्न संख्या **2** से **10** तक किन्हीं **आठ** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। अप्रोग्रामीय/वैज्ञानिक कैल्कुलेटर के प्रयोग की अनुमति है।*

---

1. निम्नलिखित में से कौन-से कथन सत्य हैं और कौन-से असत्य हैं ? अपने उत्तरों की पुष्टि के लिए एक लघु उपपत्ति या प्रति-उदाहरण दीजिए : 2×10=20

(i) $\sum_{k=0}^{n-1} \Delta^2 f_k = \Delta f_n - \Delta f_0$

(ii) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ के आइगेन मान 1, 2, 5 हैं।

(iii) फलन $f(x) = x^2 + 1$ के लिए $x = 0$ एक नियत बिंदु है।

(iv) $\nabla = 1 + E^{-1}$

(v) रुंडन त्रुटि $R_{n+1}(x)$,

$$f(x) - P_n(x) = \frac{(x - x_0)^{n+1}}{\lfloor n+1} f^{(n)}(c),$$

द्वारा दी जाती है, जहाँ $0 < c < x$ है।

(vi) $c > 0$ के लिए $\sqrt[3]{c}$, ज्ञात करने के लिए न्यूटन–रैफ्सन पुनरावृत्ति सूत्र $x_{n+1} = \frac{2x_n^3 - c}{3x_n^2}$ है।

(vii) $y(x) = \log (1 + x)$ की टेलर श्रेणी

$$x - \frac{x^2}{\lfloor 2} + \frac{x^3}{\lfloor 3} - \frac{x^4}{\lfloor 4} + \ldots\ldots - \frac{x^n}{\lfloor n}$$ है।

(viii) SOR विधि गाउस–सीडल विधि का व्यापक रूप है।

(ix) संयुक्त सिम्पसन के नियम से समाकल $\int_a^b f(x)\,dx$ का मान ज्ञात करने के लिए अंतराल $[a,b]$ को समान लंबाई वाले सम उप–अंतरालों में विभाजित करना पड़ता है।

(x) समलंबी नियम से यदि एक रैखिक फलन का समाकलन किया जाए, तो त्रुटि न्यूनतम होती है।

2. (क) समीकरण $f(x) = x^3 - 5x + 1 = 0$ का न्यूनतम धनात्मक मूल ज्ञात करने के लिए न्यूटन–रैफ्सन विधि की चार पुनरावृत्तियाँ दीजिए। 5

(ख) यदि $f(x) = \frac{1}{x^2}$ है, तो विभाजित अंतर $f[a, b, c, d]$ ज्ञात कीजिए। 5

3. (क) $u_{11} = u_{22} = u_{33} = 1$ लेकर LU वियोजन विधि से आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ का व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए। 5

(ख) समीकरण $\cos x - xe^x = 0$ का एक मूल ज्ञात करने के लिए रेगुला-फाल्सी विधि का प्रयोग कीजिए। प्रारंभिक सन्निकटन $x_0 = 0, x_1 = 1$ लीजिए और इस विधि की दो पुनरावृत्तियाँ दीजिए। 5

4. (क) मान लीजिए $f(x) = \sin x$ अंतराल [1, 3] पर परिभाषित है। इस अंतराल में लैग्रांज का रैखिक अंतर्वेशी बहुपद ज्ञात कीजिए और रुंडन त्रुटि पर परिबंध भी ज्ञात कीजिए। 5

(ख) अंतराल [3.78, 3.79] में फलन $f(x) = 2x - \log_{10} x - 7$ का एक मूल सन्निकट करने के लिए समद्विभाजन विधि की पुनरावृत्तियों की संख्या n ज्ञात कीजिए ताकि निरपेक्ष त्रुटि 10^{-7} से अधिक न हो। 5

5. (क) $h = 0.1$ लेकर चतुर्थ कोटि रुंगे–कुट्टा विधि से आदि मान समस्या

$$y' = x^2 - y, y(0) = 1$$

के लिए $y(0.1)$ का एक सन्निकट मान ज्ञात कीजिए।

5

(ख) संयुक्त सिम्पसन के नियम से समाकल $I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ का मान ज्ञात कीजिए। इस प्रकार π का एक सन्निकट मान ज्ञात कीजिए। 5

6. (क) समीकरण निकाय :

$$3x + 18y + 9z = 18$$
$$2x + 3y + 3z = 117$$
$$4x + y + 2z = 283$$

को गाउस निराकरण विधि से हल कीजिए। 5

(ख) एक आयताकार बगीचे का क्षेत्रफल $x^3 - x^2 - 11x + 18$ है। यदि बगीचे की लंबाई $(x - 2)$ है, तो इसकी चौड़ाई सांश्लेषिक विभाजन विधि से ज्ञात कीजिए। 5

7. (क) निम्नलिखित सारणी में विलुप्त पद ज्ञात कीजिए : 5

x	$f(x)$
0	1
1	3
2	9
3	?
4	81

(ख) निम्नलिखित आँकड़ों का प्रयोग करके उन छात्रों की संख्या ज्ञात कीजिए जिनके प्राप्तांक 45 से कम हैं : 5

प्राप्तांक	**छात्रों की संख्या**
30–40	31
40–50	42
50–60	51
60–70	35
70–80	31

8. (क) गर्शगोरिन परिबंधों का प्रयोग करके आव्यूह :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

के आइगेन मान आकलित कीजिए। साथ ही उस क्षेत्र का एक स्थूल आरेख बनाइए जिसमें आइगेन मान स्थित हैं। 5

(ख) $h = 0.01$ के साथ ऑयलर विधि के प्रयोग से $x = 0.04$ पर आदि मान समस्या $y' = -y$; $y(0) = 1$ को संख्यात्मक रूप से हल कीजिए। साथ ही यथातथ त्रुटि भी ज्ञात कीजिए। 5

9. (क) निम्नलिखित आँकड़ों के लिए न्यूटन का पश्चांतर अंतर्वेशी बहुपद ज्ञात कीजिए : 5

x	y
0	1
1	0
2	1
3	10

(ख) $h = 0.1$ लेकर तृतीय कोटि टेलर श्रेणी विधि से $x = 0.1$ पर आदि मान समस्या $y' = x - y^2$; $y(0) = 1$ को हल ज्ञात कीजिए। 5

10. (क) $f(x) = \sin x$ को $1 - \frac{x^3}{\lfloor 3} + \frac{x^5}{\lfloor 5} - \frac{x^7}{\lfloor 7}$ से सन्निकट करने पर प्राप्त रुंडन त्रुटि के लिए परिबंध ज्ञात कीजिए, जहाँ $-1 \le x \le 1$ है। 5

(ख) प्रारंभिक सन्निकटन $x_0 = -2$ लेकर बिरजे-वीटा विधि से समीकरण :

$$P(x) = 2x^4 - 3x^2 + 3x - 4 = 0$$

के एक मूल का सन्निकटन ज्ञात कीजिए। केवल एक ही पुनरावृत्ति कीजिए। 5

× × × × ×