No. of Printed Pages : 8

MTE–008

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)
Term-End Examination
June, 2025

Elective Course : Mathematics
MTE-008 : DIFFERENTIAL EQUATIONS

Time : 2 Hours *Maximum Marks : 50*

Note : *(i) Question No.* ***1*** *is compulsory.*

(ii) Answer any ***four*** *questions from the remaining Question Nos.* ***2*** *to* ***7****.*

(iii) Use of calculators is not allowed.

(iv) Symbols have their usual meanings.

1. State whether the following statements are True *or* False. Justify your answer with the help of a short proof or a counter-example : 10

(i) The degree of the differential equation :

$$y - x\frac{dy}{dx} = r\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^3}$$

is 3.

(ii) The equation $y = e^{ix}$ is a solution of $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0;\ x \in \mathbf{R}$.

(iii) The equation $2(y + zp) = q(xpt + yq)$ is a non-linear partial differential equation.

(iv) The general solution of the equation $x^2y'' + xy' + 4y = 0$ defined in $x > 0$ is given by :

$$y = c_1 \cos(2\log x) + c_2 \sin(2\log x)$$

(v) Partial differential equation :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

is hyperbolic in $\mathbf{R}^2$.

2. (a) Solve : 5

$$y = 2px + p^4x^2; \quad x > 0$$

(b) Solve : 5

$$(5 + 2x)^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 6(5 + 2x)\frac{dy}{dx} + 8y = 0$$

3. (a) Find the complete integral of the PDE :

$$(p^2 + q^2)y = qz$$

using Charpit's method. 6

(b) Eliminate the arbitray function F from the following equations and obtain the PDE : 4

$$F\left(\frac{xy}{z}\right) = 0$$

4. (a) Use the method of variation of parameters to solve the equation : 5

$$(D^2 + 2D - 8)y = 2e^{4t}$$

(b) Find the general integral of the equation : 5

$$(2xy - 1)p + (z - 2x^2)q = 2(x - yz)$$

and the solution surface which passes through the lines $x = 1,\ y = 0$.

5. (a) Solve : 5

$$y(axy + e^x)\,dx - e^x dy = 0$$

(b) Show that the equation : 5

$$x^2 z_{xx} + 2xy z_{xy} + y^2 z_{yy} - xz_x + 3yz_y = \frac{8y}{x}$$

can be reduced to :

$$\nu^2 \frac{\partial^2 z}{\partial \nu^2} - \nu \frac{\partial z}{\partial \nu} = 8\frac{u}{\nu^2}$$

by transformation $u = xy,\ \nu = x$.

6. (a) Solve the following simultaneous differential equation : 4

$$\frac{dx}{y^3x - 2x^4} = \frac{dy}{2y^2 - x^3y} = \frac{dz}{9z(x^3 - y^3)}$$

(b) Find the steady state solution $u(x, t) = u_s(x)$ of heat equation $u_t = a^2 u_{xx}$ satisfying the conditions : 6

$$u(0, t) = -1$$

$$u(2, t) = 1 .$$

7. Solve the following differential equation : 10

$$D^2y + (1 - \cot x)\,Dy - y\cot x = \sin^2 x$$

MTE–008

स्नातक उपाधि कार्यक्रम (बी. डी. पी.)

सत्रांत परीक्षा

जून, 2025

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित

एम.टी.ई.-008 : अवकल समीकरण

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

नोट : *(i) प्रश्न सं. **1** अनिवार्य है।*

*(ii) प्रश्न सं. **2** से **7** तक कोई **चार** प्रश्न हल कीजिए।*

(iii) कैल्कुलेटर का प्रयोग करने की अनुमति नहीं है।

(iv) प्रतीकों के अपने सामान्य अर्थ हैं।

---

1. निम्नलिखित कथनों में से कौन-से कथन सत्य और असत्य हैं ? अपने उत्तर के पक्ष में संक्षिप्त उपपत्ति या प्रति उदाहरण दीजिए : 10

(i) अवकल समीकरण :

$$y - x\frac{dy}{dx} = r\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^3}$$

की कोटि 3 है।

(ii) $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0;\ x \in \mathbf{R}$ का एक हल समीकरण $y = e^{ix}$ है।

(iii) समीकरण $2(y + zp) = q(xpt + yq)$ एक अरैखिक आंशिक अवकल समीकरण है।

(iv) समीकरण $x^2y'' + xy' + 4y = 0$ का $x > 0$ में सामान्य हल $y = c_1 \cos(2\log x) + c_2 \sin(2\log x)$ है।

(v) आंशिक अवकल समीकरण $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ एक $\mathbf{R}^2$ में अतिपरवलय है।

2. (क) हल कीजिए : 5

$$y = 2px + p^4x^2;\ x > 0$$

(ख) हल कीजिए : 5

$$(5 + 2x)^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 6(5 + 2x)\frac{dy}{dx} + 8y = 0$$

3. (क) चारपिट विधि का प्रयोग करके निम्नलिखित PDE का पूर्ण हल निकालिए : 6

$$(p^2 + q^2)y = qz$$

(ख) स्वेच्छ फलन F को निम्नलिखित समीकरण से लुप्त कीजिए और PDE को प्राप्त कीजिए : 4

$$\mathrm{F}\left(\frac{xy}{z}\right)=0$$

4. (क) प्राचल विचरण विधि का प्रयोग करके निम्नलिखित समीकरण हल कीजिए : 5

$$(\mathrm{D}^2+2\mathrm{D}-8)y=2e^{4t}$$

(ख) समीकरण : 5

$$(2xy-1)p+(z-2x^2)q=2(x-yz)$$

का सामान्य समाकल ज्ञात कीजिए और रेखाओं $x=1,\ y=0$ से गुजरने वाला समतल हल निकालिए।

5. (क) हल निकालिए : 5

$$y(axy+e^x)\,dx-e^x dy=0$$

(ख) दर्शाइए कि समीकरण : 5

$$x^2 z_{xx}+2xy\,z_{xy}+y^2 z_{yy}-xz_x+3yz_y=\frac{8y}{x},$$

$u=xy,\ \nu=x$ रखने पर $\nu^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial\nu^2}-\nu\dfrac{\partial z}{\partial\nu}=8\dfrac{u}{\nu^2}$

में समानीत हो सकती है।

6. (क) निम्नलिखित युगपत् अवकल समीकरण हल कीजिए : 4

$$\frac{dx}{y^3x - 2x^4} = \frac{dy}{2y^2 - x^3y} = \frac{dz}{9z(x^3 - y^3)}$$

(ख) ऊष्मा समीकरण $u_t = a^2 u_{xx}$ का स्थिर अवस्था में $u(x, t) = u_s(x)$ हल ज्ञात कीजिए जिसके लिए $u(0, t) = -1$, $u(2, t) = 1$ । 6

7. निम्नलिखित अवकल समीकरण का हल ज्ञात कीजिए : 10

$$D^2y + (1 - \cot x)\,Dy - y\cot x = \sin^2 x$$

× × × × ×