No. of Printed Pages : 12

MTE–02

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)

Term-End Examination

June, 2025

MTE-02 : LINEAR ALGEBRA

Time : 2 Hours *Maximum Marks : 50*

Note : *Question No.* ***7*** *is compulsory. Do any* ***four*** *questions from Q. No. 1 to Q. N. 6. Use of calculator is not allowed.*

---

1. (a) Is the set {(1, 2, 3}, (2, 3, 1), (3, 1, 2)} in $\mathbb{R}^3$, linearly independent over $\mathbb{R}$? Give reasons for your answer. 3

(b) Check whether or not the angle between the vectors $\vec{u} = (0, 1)$ and $\vec{v} = (4, +3)$ is the same as the angle between the vectors $\vec{r} = (1, 0)$ and $\vec{s} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$. 3

(c) Check whether the following system of linear equations can be solved by Cramer's rule. If it can, apply the rule to solve it. Else use the Gaussian Elimination process for solving it : 4

$$x + y = 3 - z$$
$$x + z = y + 1$$
$$x + 5y = 7 - z$$

2. (a) Determine the value of k for which the matrix $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & k \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$ is invertible. 2

(b) Find the dual basis for the basis $\{1 + x, x + x^2, x^2\}$ of the space : 3

$$P_2 = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}.$$

(c) Find the adjoint of the following matrix A, and hence find A^{-1} : 5

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

3. (a) Find the matrix of the differentiable operator $D : V \to V$ with respect to the basis $B = \{1 - t^2, 2t, 3t^2, 4t^3\}$ of the vector space V of all polynomials of degree ≤ 3 over $\mathbb{R}$. 3

(b) Is the matrix $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$ diagonalizable ? If yes, then find the matrix P and diagonal matrix D such that $P^{-1}AP = D$. If A is not diagonalizable, find a matrix Q that is similar to P. 5

(c) Check whether or not the set $W = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a + b - c = 1\}$ is a subspace of $\mathbb{R}^3$. 2

4. (a) Show that the linear operator $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ defined by : 4

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_2, x_1, x_3)$$

is a unitary operator.

(b) Obtain an orthonormal basis of $\mathbb{R}^3$ containing the vector $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, 0\right)$. 4

(c) Find the inverse of the matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ by using Cayley-Hamilton theorem. 2

5. (a) Consider the mapping $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, defined by :

$$T(x, y, z) = (x + y, y + z, z + x).$$

Check whether or not T is an isomorphism. If it is, find T^{-1}. If T is not an isomorphism, find the characteristic polynomial of T. 5

(b) Reduce

$$(16x^2 - 104x + 44) \to (9y^2 - 172$$

$$y - 24\,xy) = 0$$

to standard form. Hence identify the conic it represents. 5

6. (a) Find the vector equation of the plane determined by the points (1, 0, 3), (– 2, 1, 0), (1, 1, 3). Further, find the position vector of the point of intersection of this plane with the line $r = \alpha i + (1 + 2\alpha)j - (2 - 3\alpha)k$. 4

(b) State and prove the relationship between the rank and the determinant rank of a matrix. 6

7. Which of the following statements are true and which are false ? Justify your answers with a short proof or a counter-example, whichever is appropriate. Marks will be given only for correct justification : 10

(i) W_1 and W_2 are two subspaces of $\mathbb{R}^4$ of dimensions 3 and 2, respectively, then the dimension of $(W_1 \cap W_2)$ is at least 1.

(ii) 1 is the only eigen value of a unitary operator.

(iii) If 0 is an eigen value of a square matrix A, then A is not invertible.

(iv) If T is a linear operator on a finite dimensional real vector space V and the rank of T is equal to the dimension of V, then T is an isomorphism.

(v) There is a unique linear operator T on $\mathbb{R}^3$ such that the characteristic polynomial of T is $(2x - 1)(x + 1)^2$ and the minimal polynomial of T is $(2x - 1)$.

MTE–02

स्नातक उपाधि कार्यक्रम (बी. डी. पी.)

सत्रांत परीक्षा

जून, 2025

एम.टी.ई.–02 : रैखिक बीजगणित

समय : 2 घण्टे अधिकतम अंक : 50

नोट : *प्रश्न संख्या 7 करना जरूरी है। प्रश्न संख्या 2 से 6 तक से कोई **चार** प्रश्न कीजिए। कैल्कुलेटर का प्रयोग नहीं करना है।*

1. (क) क्या $\mathbb{R}^3$ में समुच्चय $\{(1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2)\}$ $\mathbb{R}$ पर रैखिकतः स्वतंत्र हैं। अपने उत्तर का कारण बताइए। 3

(ख) जाँच कीजिए कि सदिशों $\vec{u} = (0, 1)$ और $\vec{v} = (4, +3)$ के बीच के कोण और सदिशों $\vec{r} = (1, 0)$ और $\vec{s} = \left(\frac{2}{5}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ के बीच के कोण समान हैं या नहीं। 3

(ग) जाँच कीजिए कि निम्नलिखित रैखिक समीकरणों निकाय को क्रैमर विधि से हल किया जा सकता है या नहीं। यदि हल किया जा सकता है, तो उस विधि से हल कीजिए अथवा गाउसियन निराकरण का प्रयोग करके हल कीजिए : 4

$$x + y = 3 - z$$
$$x + z = y + 1$$
$$x + 5y = 7 - z$$

2. (क) k का वह मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए आव्यूह

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & k \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$ व्युत्क्रमणीय है। 2

(ख) समष्टि $P_2 = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ में आधार $(1 + x, x + x^2, x^2)$ का द्वैत आधार निकालिए। 3

(ग) निम्नलिखित आव्यूह A का सहखण्डज निकालिए और उससे A^{-1} निकालिए : 5

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

3. (क) $\mathbb{R}$ पर अधिकतम कोटि 3 वाले बहुपदों की सदिश समष्टि V का आधार $B = \{1 - t^2, 2t, 3t^2, 4t^3\}$ के सापेक्ष अवकलक संकारक $D : V \to V$ का आव्यूह ज्ञात कीजिए। 3

(ख) क्या आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$ विकर्णनीय है ?

यदि हाँ, तो एक आव्यूह P और एक विकर्ण आव्यूह D ज्ञात कीजिए जिसके लिए $P^{-1}AD = D$ है। यदि A विकर्णनीय नहीं है, तो एक P का समरूप आव्यूह Q निकालिए। 5

(ग) जाँच कीजिए कि समुच्चय

$W = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a + b - c = 1\}$

$\mathbb{R}^3$ की उपसमष्टि है या नहीं। 2

4. (क) दिखाइए कि $T(x_1, x_2, x_3) = (x_2, x_1, x_3)$ द्वारा परिभाषित रैखिक संकारक $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ एक ऐकिक संकारक है। 4

(ख) सदिश $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, 0\right)$. को आविष्ट करके एक $\mathbb{R}^3$ का प्रसामान्य लाम्बिक आधार निकालिए। 4

(ग) कैली–हैमिल्टन की प्रमेय को प्रयोग करके आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ का व्युत्क्रम निकालिए। 2

5. (क) फलन $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ जो

$$T(x, y, z) = (x + y, y + z, z + x)$$

द्वारा परिभाषित कीजिए। क्या T एक तुल्यकारिता है। यदि है, तो T^{-1} ज्ञात कीजिए। यदि T तुल्यकारिता नहीं है, तो T का अभिलाक्षणिक बहुपद निकालिए। 5

(ख) $(16x^2 - 104x + 44) \to (9y^2 - 172y - 24\,xy) = 0$ के मानक रूप में बदलिए। इस तरह पहचान कीजिए कि इससे कौन–सा शांकव निरूपित होता है। 5

6\. (क) बिन्दुओं (1, 0, 3), (– 2, 1, 0) और (1, 1, 3) द्वारा निर्धारित समतल का सदिश समीकरण निकालिए। आगे इस समतल के साथ रेखा

$$r = \alpha i + (1 + 2\alpha)j - (2 - 3\alpha)k$$

के परिच्छेद बिन्दु का स्थिति सदिश निकालिए। 4

(ख) कोटि और सारणिक कोटि के बीच एक सम्बन्ध बताइये और सिद्ध भी कीजिए। 6

7\. निम्नलिखित कथनों में से कौन–से कथन सत्य और कौन–से कथन असत्य हैं ? अपने उत्तर की पुष्टि एक लघु उपपत्ति या प्रति–उदाहरण द्वारा दीजिए, जो भी उचित है। अंक सही पुष्टीकरण देने से ही दिए जाएँगे : 10

(i) W_1 और W_2 क्रमशः विमा 2 और 3 वाली $\mathbb{R}^4$ की उपसमष्टियाँ हैं, तो $(W_1 \cap W_2)$ की विमा कम–से–कम 1 है।

(ii) एक ऐकिक संकारक का केवल 1 ही आइगेन मान है।

(iii) यदि शून्य एक वर्गीय आव्यूह A का आइगेन मान है, तो A व्युत्क्रमणीय नहीं है।

(iv) यदि T एक परिमित विमा वाले वास्तविक सदिश समष्टि V पर एक रैखिक संकारक है और T की कोटि V की विमा के समान है, तो T एक तुल्यकारिता है।

(v) $\mathbb{R}^3$ पर एक ऐसा अद्वितीय रैखिक संकारक T है। T का अभिलक्षणिक बहुपद $(2x - 1)(x + 1)^2$ और T का अल्पिष्ट बहुपद $(2x - 1)$ का T है।

× × × × ×