

**BACHELOR'S DEGREE
PROGRAMME (BDP)**

Term-End Examination

June, 2025

MTE-06 : ABSTRACT ALGEBRA

Time : 2 Hours

Maximum Marks : 50

Note : (i) Attempt **five** questions in all.

(ii) The **seventh** question is compulsory.

(iii) Do any **four** questions from Q. Nos.
1 to 6.

(iv) Use of calculators is not allowed.

1. (i) Let $A = \{x \in \mathbf{R} \mid x > 0\}$. Check whether or not the function $f : A \rightarrow A$, given by $f(x) = x^2 + 2$, is one-one. 2

(ii) Define an abelian group. Give an example, with justification, of an infinite abelian group. 2

(iii) Write the permutation

$$\sigma = (1 \ 4 \ 3 \ 2) (2 \ 3 \ 5)$$

as a product of disjoint cycles, and as a product of transpositions. 2

(iv) Check whether or not :

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

is a nilpotent element in the ring of 3×3 matrices with real entries. 2

(v) Let R be an integral domain and $a, b \in R$ be associates. Show that $a|b$ and $b|a$. 2

2. (a) List the ideals of $\mathbf{Z}/40\mathbf{Z}$. How many of them are principal ideals ? Give reasons for your answer. 3

(b) Show that $\frac{GL_2(\mathbf{R})}{SL_2(\mathbf{R})} \simeq \mathbf{R}^*$, where

$$\mathbf{R}^* = \mathbf{R} \setminus \{0\}. \quad 5$$

(c) Find the order of $\bar{4}$ in $(\mathbf{Z}_{10}, +)$. 2

3. (a) Let :

$$G = \left\{ \begin{bmatrix} a & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mid a \in \mathbf{R}, a \neq 0 \right\}$$

Check whether or not G is a group under matrix multiplication. 3

(b) Define the centre of a group. Find the centre of quaternion group, Q_8 . 3

(c) Let $R = \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ be the ring with respect to addition defined by :

$$\begin{aligned}(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) \\ = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)\end{aligned}$$

and multiplication defined by :

$$\begin{aligned}(x_1, y_1, z_1) \cdot (x_2, y_2, z_2) \\ = (x_1 x_2, y_1 y_2, z_1 z_2)\end{aligned}$$

Check whether or not :

$$S = \{(a, b, c) \in \mathbf{R} \mid a + b = c\}$$

is a subring of $\mathbf{R}$. Further, find a non-trivial proper ideal of $\mathbf{R}$. 4

4. (a) Let $R = \mathbf{Z}[i]$, $n \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$ and $I = nR$. Show that $a + ib \in I$ iff $n \mid a$ and $n \mid b$. Further show that R/I is a finite ring. 6

(b) Let G be a group of order 33. Show that all its Sylow subgroups are normal. 4

5. (a) Let G be a group, $H \trianglelefteq G$, $K \trianglelefteq G$, such that $(o(H), o(K)) = 1$ and $G = HK$. Show that G is an abelian group. 4

- (b) From the multiplication table of $S = \{\bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \bar{10}, \bar{12}\}$ under multiplication (mod 14). Check whether or not S is a group. 6
6. (a) Show that, in a finite commutative ring with unity, every non-zero element is either a zero divisor or a unit. Also find the number of zero divisors of Z_{20} . 6
- (b) Let R be a commutative ring with identity. Let I and J be ideals of R such that $I + J = R$. Show that $IJ = I \cap J$. 4
7. Which of the following statements are true and which are false ? Justify your answers with a short proof or a counter-example, whichever is appropriate : 10
- (i) A subring of a UFD must be a UFD.
- (ii) If G is a group and H is a subgroup such that $H \trianglelefteq G$ and G/H is cyclic, then G is cyclic.
- (iii) The field of quotients of $Z + (\sqrt{2})Z$ is R .
- (iv) $\{Z, Q, \text{IGNOU}, \pi\}$ is a set.
- (v) If $(R, \oplus, \odot)$ is a ring, any subgroup of $(R, \oplus)$ is a subring of $(R, \oplus, \odot)$.

MTE-06**स्नातक उपाधि कार्यक्रम (बी. डी. पी.)****सत्रांत परीक्षा****जून, 2025****एम.टी.ई.-06 : अमूर्त बीजगणित**

समय : 2 घण्टे

अधिकतम अंक : 50

नोट : (i) कुल पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

(ii) प्रश्न संख्या 7 करना जरूरी है।

(iii) प्रश्न संख्या 1 से 6 तक किन्हीं चार प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

(iv) कैलकुलेटर्स का प्रयोग करने की अनुमति नहीं है।

1. (i) मान लीजिए $A = \{x \in \mathbf{R} \mid x > 0\}$ । जाँच कीजिएकि फलन $f : A \rightarrow A$, जो $f(x) = x^2 + 2$ द्वारा दिया गया है, एकैकी है। 2

(ii) एक आबेली समूह को परिभाषित कीजिए। पुष्टि के साथ एक अनंत आबेली समूह का उदाहरण दीजिए। 2

(iii) क्रमचय $\sigma = (1\ 4\ 3\ 2)(2\ 3\ 5)$ को पक्षान्तरणों के गुणनफलन के रूप में एवं असंयुक्त चक्रों के गुणनफलन के रूप में लिखिए। 2

(iv) जाँच कीजिए कि :

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

वास्तविक प्रविष्टियों वाले 3×3 अवयवों के वलय में शून्य भावी अवयव हैं। 2

(v) मान लीजिए R एक पूर्णाकीय प्रान्त है और $a, b \in R$ सहचारी अवयव है। दिखाइए कि $a \mid b$ और $b \mid a$ । 2

2. (क) वलय $\mathbf{Z}/40\mathbf{Z}$ की गुणजावलियों की सूची बनाइए। इनमें कितनी मुख्य गुणजावली हैं। अपने उत्तर का कारण बताइए। 3

(ख) दिखाइए कि $\frac{GL_2(\mathbf{R})}{SL_2(\mathbf{R})} \simeq \mathbf{R}^*$, जहाँ $\mathbf{R}^* = \mathbf{R} \setminus \{0\}$ । 5

(ग) $(\mathbf{Z}_{10}, +)$ में $\bar{4}$ की कोटि निकालिए। 2

3. (क) मान लीजिए :

$$G = \left\{ \begin{bmatrix} a & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mid a \in \mathbf{R}, a \neq 0 \right\}$$

जाँच कीजिए कि G आव्यूह गुणन के सापेक्ष समूह है। 3

(ख) एक समूह का केन्द्र परिभाषित कीजिए। चतुष्टयी समूह Q_8 का केन्द्र निकालिए। 3

(ग) मान लीजिए कि $R = \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$

$$\begin{aligned} (x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) \\ = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \end{aligned}$$

द्वारा परिभाषित योग और

$$\begin{aligned} (x_1, y_1, z_1) \cdot (x_2, y_2, z_2) \\ = (x_1 x_2, y_1 y_2, z_1 z_2) \end{aligned}$$

द्वारा परिभाषित गुणन के सापेक्ष वलय है। जाँच कीजिए कि $S = \{(a, b, c) \in \mathbf{R} \mid a + b = c\}$, वलय R की उपवलय है। आगे R में एक उचित अतुच्छ गुणजावली निकालिए। 4

4. (क) मान लीजिए $R = \mathbf{Z}[i]$, $n \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$ और $I = nR$. दिखाइए कि वह $a + ib \in I$ यदि और केवल यदि $n \mid a$ और $n \mid b$. आगे दिखाइए कि R/I एक परिमित वलय है। 6

(ख) मान लीजिए G कोटि 33 वाला समूह है। दिखाइए कि इस समूह के सीलो उपसमूह प्रसामान्य हैं। 4

5. (क) मान लीजिए G एक समूह है, $H \trianglelefteq G$, $K \trianglelefteq G$,
जहाँ $(o(H), o(K)) = 1$ और $G = HK$ दिखाइए
कि G एक आबेली समूह है। 4

- (ख) $S = \{\bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \bar{10}, \bar{12}\}$ का गुणन (mod 14)
सापेक्ष गुणन तालिका बनाइए। जाँच कीजिए कि S
एक समूह है या नहीं। 6

6. (क) दिखाइए कि एक परिमित तत्सम का क्रमविनिमेय
वलय में प्रत्येक अवयव या तो मात्रक है या शून्य का
भाजक है। Z_{20} के शून्य भाजकों की संख्या भी ज्ञात
कीजिए। 6

- (ख) मान लीजिए R एक क्रमविनिमेय तत्सम का वलय है।
मान लीजिए I और J वलय R की गुणजावलियाँ
हैं जिनके लिए $I + J = R$. दिखाइए कि
 $IJ = I \cap J$ । 4

7. निम्नलिखित कथनों में से कौन-से कथन सत्य और कौन-से
कथन असत्य हैं ? अपने उत्तर की लघु उपपत्ति या
प्रत्युदाहरण द्वारा पुष्टि कीजिए जो भी उचित है : 10

- (i) एक अद्वितीय गुणनखंडन प्रान्त (UFD) की उपवलय
भी अद्वितीय गुणनखंडन प्रान्त है।

(ii) यदि G एक समूह और H एक उपसमूह है जिसके लिए $H \trianglelefteq G$ और G/H चक्रीय है, तो G चक्रीय है।

(iii) $\mathbf{R}$ वलय $\mathbf{Z} + (\sqrt{2})\mathbf{Z}$ का विभाग क्षेत्र है।

(iv) $\{\mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \text{IGNOU}, \pi\}$ एक समुच्चय है।

(v) यदि $(R, \oplus, \odot)$ एक वलय है, $(R, \oplus)$ का कोई भी उपसमूह $(R, \oplus, \odot)$ की उपवलय है।

× × × × ×