No. of Printed Pages : 12 **MTE–07**

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)

Term-End Examination

June, 2025

MTE-07 : ADVANCED CALCULUS

Time : 2 Hours *Maximum Marks : 50*

Note : *(i) Question No.* ***1*** *is compulsory.*

(ii) Attempt any ***four*** *questions out of the remaining Q. Nos.* ***2*** *to* ***7****.*

(iii) Use of calculator is not allowed.

---

1. State whether the following statements are True *or* False. Give a short proof or a counter-example in support of your answer : 5×2=10

 (a) Domain of the real valued function f of three variables given by

$$f(x, y, z) = \frac{x}{y^2 + z^2} \text{ is } \mathbf{R} \sim \{0, 0, 0\}.$$

(b) Two functions :

$$f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R} \text{ and } g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$$

given by $f(x, y) = \dfrac{4x^2 + 9y^2}{6x^2 + 7y^2}$ and $g(x, y) = \dfrac{x^2}{x^2 + y^2}$ are functionally dependent.

(c) If $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbf{R}$ is continuous, then f is integrable.

(d) A function $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ defined by :

$$f(x, y, z) = |x| + |y| + |z|$$

is differentiable everywhere.

(e) A circle with centre at the origin (0, 0) and radius 5 is a level curve of the function $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ defined by $f(x, y) = 36 - x^2 - y^2$.

2. (a) Evaluate : 2

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{7 + e^{-5x}}$$

(b) Let $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ be defined by :

$$f(x, y) = |2x - 3| + |y - 1|.$$

Calculate $f_x(0,0)$ as well as $f_y(0,0)$, if they exist. 4

(c) Find the second Taylor's polynomial of the function $f(x, y) = e^{2x+5y}$ at the point (1, 0). 4

3. (a) Show that the function $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ defined by :

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{if either } x = 0 \text{ or } y = 0 \\ 2, & \text{otherwise} \end{cases}$$

is continuous at the point (1, 1). 3

(b) Integrate $f(x, y) = x^4 + y^2$ over the region bounded by $y = x$, $y = 2x$ and $x = 2$. 3

(c) If $u = x\cos y$, $v = ye^{x}$, $w = \sin xz$, find the Jacobian $\dfrac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}$ and evaluate it at $\left(2,0,\dfrac{\pi}{3}\right)$. 4

4. (a) Under what condition on k does :

$$\lim_{x\to 0}\frac{kx\cos x - \sin x}{x^2 \sin x}$$

exist ? Also find the limit when it exists. 3

(b) Compute the volume within the cylinder $x^2 + y^2 = 1$ between the planes $x + y + z = 4$ and $z = 0$. 4

(c) Let $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ and $e_3 = (0,0,1)$. Find the points $x = e_1 + 2e_2$ and $y = e_2 + e_3$. Also, find the distance of the point $x + 5y$ from the origin. 3

5. (a) Using the method of Lagrange's multipliers, find the stationary points of the function $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ defined by $f(x,y) = xy$ on the plane $x + y = 1$.

Further check whether or not stationary points so obtained are extreme points. 4

(b) Use Green's theorem to evaluate :

$$\int_C \left(3x^2 + y\right) dx + \left(2x - 3y^2\right) dy,$$

where C is the ellipse $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{16} = 1$. 3

(c) If :

$$f(x, y) = \frac{x^5 + y^5}{x^2 + y^2},$$

show that :

$$x \frac{\partial F}{\partial x} + y \frac{\partial F}{\partial y} = 3f(x, y),$$

stating the results used. 3

6. (a) Find the directional derivative of :

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0,0) \\ 0, & (x, y) = (0,0) \end{cases}$$

at (0, 0) in the directions (i) $\theta = \dfrac{\pi}{2}$, and (ii) $\theta = \dfrac{\pi}{4}$. 5

(b) Evaluate $\iiint_S z^2 dx\, dy\, dz$, where S is the solid region between the sphere $\rho = 1$ and $\rho = 2$, by using spherical coordinates. 5

7. (a) Evaluate : 2

$$\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{2x^2 + 3x + 2} - \sqrt{2x^2 - 3x + 2} \right)$$

(b) Let $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ be defined by :

$$f(x, y, z) = (\sin x, \cos y, \sin z)$$

and $g : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ be defined by :

$$g(x, y, z) = \left(x + z,\ y^2,\ z^2 + 1\right).$$

Show that :

$$\mathrm{F}\left(\frac{\pi}{2}, 0, 0\right) \neq \mathrm{G}\left(\frac{\pi}{2}, 0, 0\right)$$

where F = f o g and G = g o f. 4

(c) If possible, find a function f such that : 4

$$\mathrm{F} = \left(10xy + 6y^2,\ 5x^2 + 12xy\right) = \nabla f.$$

MTE–07

स्नातक उपाधि कार्यक्रम (बी. डी. पी.)

सत्रांत परीक्षा

जून, 2025

एम.टी.ई.–07 : उच्च कलन

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

नोट : (i) *प्रश्न संख्या 1 अनिवार्य है।*

(ii) *प्रश्न संख्या 2 से 7 तक किन्हीं* **चार** *प्रश्नों के उत्तर दीजिए।*

(iii) *कैल्कुलेटर का प्रयोग करने की अनुमति नहीं है।*

1. बताइए कि निम्नलिखित कथन सत्य हैं **या** असत्य। अपने उत्तर के पक्ष में लघु उपपत्ति या प्रति–उदाहरण दीजिए :

5×2=10

(क) $f(x, y, z) = \dfrac{x}{y^2 + z^2}$ द्वारा परिभाषित तीन चरों वाला वास्तविक मान फलन f का प्रांत $\mathbf{R} \sim \{(0, 0, 0\}$ है।

(ख) $f(x,y)=\dfrac{4x^2+9y^2}{6x^2+7y^2}$ और $g(x,y)=\dfrac{x^2}{x^2+y^2}$ द्वारा क्रमशः दिए गए फलनों $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ और $g:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$, फलनिकतः आश्रित हैं।

(ग) यदि $f:[a,b]\times[c,d]\to\mathbf{R}$ संतत है, तो f समाकलनीय है।

(घ) $f(x,y,z)=|x|+|y|+|z|$ द्वारा परिभाषित फलन $f:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}$ सर्वत्र अवकलनीय है।

(ङ) $f(x,y)=36-x^2-y^2$ द्वारा परिभाषित फलन $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ का स्तर वक्र वृत्त है जिसका केन्द्र मूलबिन्दु (0, 0) पर है और त्रिज्या 5 है।

2. (क) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{7+e^{-5x}}$ को परिकलित कीजिए। 2

(ख) मान लीजिए :

$$f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R},\ f(x,y)=|2x-3|+|y-1|$$

द्वारा परिभाषित है। $f_x(0,0), b_y=(0,0)$ परिकलित कीजिए, यदि अस्तित्व है। 4

(ग) बिन्दु $(1,0)$ पर फलन $f(x,y)=e^{2x+5y}$ का द्वितीय टेलर बहुपद ज्ञात कीजिए। 4

3. (क) दिखाइए कि नीचे दिया गया फलन बिन्दु (1, 1) पर संतत है : 3

$$f(x,y)=\begin{cases}0, & \text{यदि } x=0 \text{ या } y=0\\ 2, & \text{अन्यथा}\end{cases}$$

(ख) $y=x, y=2x$ और $x=2$ से परिबद्ध प्रदेश पर फलन $f(x,y)=x^4+y^2$ का समाकल प्राप्त कीजिए। 3

(ग) यदि $u=x\cos y, v=ye^x, w=\sin xz$, तब जैकोबियन $\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}$ ज्ञात कीजिए और $\left(2,0,\frac{\pi}{3}\right)$ पर परिकलित भी कीजिए। 4

4. (क) k का वह मान ज्ञात जिसके लिए :

$$\lim_{x\to 0}\frac{kx\sin x-\sin x}{x^2\sin x}$$

का अस्तित्व हो। सीमा का मान भी ज्ञात कीजिए। 3

(ख) बेलन $x^2 + y^2 = 1$ के अन्दर और समतल $x + y + z = 4$ और $z = 0$ के बीच में स्थित प्रवेश का आयतन ज्ञात कीजिए। 4

(ग) मान लीजिए $e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0)$ और $e_3 = (0,0,1)$, तब बिन्दु $x = e_1 + 2e_2$ और $y = e_2 + e_3$ प्राप्त कीजिए। मूलबिन्दु से बिन्दु $x + 5y$ तक के बीच की दूरी भी प्राप्त कीजिए। 3

5. (क) लैग्रांज गुणक विधि से समतल $x + y = 1$ पर $f(x, y) = xy$ द्वारा परिभाषित फलन $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ के स्तब्ध बिन्दु ज्ञात कीजिए। यह भी जाँच कीजिए कि स्तब्ध बिन्दु उसके चरम मान बिन्दु हो। 4

(ख) ग्रीन प्रमेय प्रयोग करके :

$$\int_C \left(3x^2 + y\right) dx + \left(2x - 3y^2\right) dy$$

का मान ज्ञात कीजिए, जहाँ C दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ है। 3

(ग) यदि : 3

$$f(x,y) = \frac{x^5 + y^5}{x^2 + y^2},$$

तब दिखाइए कि :

$$x\frac{\partial F}{\partial x} + y\frac{\partial F}{\partial y} = 3f(x,y),$$

आपने जिन परिणामों का इस्तेमाल किया, वे भी बताइए।

6. (क) निम्नलिखित फलन का, दिशाएँ (i) $\theta = \frac{\pi}{2}$ और (ii) $\theta = \frac{\pi}{4}$ में $(0,0)$ पर दिक् अवकलज ज्ञात कीजिए : 5

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \quad , & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(ख) गोलीय निर्देशांकों का प्रयोग करके :

$$\iiint_S z^2 dx\, dy\, dz$$

का मान ज्ञात कीजिए, जहाँ S गोला $\rho = 1$ और गोला $\rho = 2$ से परिबद्ध प्रदेश है। 5

7. (क) परिकलित कीजिए : 2

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{2x^2+3x+2}-\sqrt{2x^2-3x+2}\right)$$

(ख) मान लीजिए कि $f(x,y,z)=(\sin x, \cos y, \sin z)$ और $g(x,y,z)=(x+z,\ y^2,\ z^2+1)$ द्वारा क्रमशः दिए गए फलन $f:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$ और $g:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$ के लिए दिखाइए कि : 4

$$\mathrm{F}\left(\frac{\pi}{2},0,0\right)\neq \mathrm{G}\left(\frac{\pi}{2},0,0\right),$$

जहाँ $\mathrm{F}=f\circ g$ और $\mathrm{G}=g\circ f$ ।

(ग) यदि संभव है, तो एक ऐसा फलन f ज्ञात कीजिए कि : 4

$$\mathrm{F}=\left(10xy+6y^2,\ 5x^2+12xy\right)=\nabla f$$

× × × × ×