No. of Printed Pages : 9 **MTE–09**

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)

Term-End Examination

June, 2025

Elective Course : Mathematics

MTE-09 : REAL ANALYSIS

Time : 2 Hours *Maximum Marks : 50*

Weightage : 70%

Note : *Attempt* ***five*** *questions in all. Q. No.* ***7*** *is compulsory. Answer any* ***four*** *questions from question nos.* ***1*** *to* ***6****. Use of calculator is not allowed.*

---

1. (a) Show that on the curve $y = 4x^2 - 5x + 7$, the chord joining the points whose abscissa are $x = 2$ and $x = 3$ is parallel to the tangent at the point, whose abscissae is $x = \frac{5}{2}$. 4

(b) Find the values of m and n so that : 4

$$\lim_{x \to 0} \frac{x(1 + m\cos x) - n\sin x}{x^3} = -\frac{1}{4}$$

(c) Write the inequality $-3 \le x - \frac{1}{2} \le \frac{1}{2}$ in the modulus form. 2

2. (a) If the limits $\lim_{x \to a} f(x)$ and $\lim_{x \to a} g(x)$ exist and $f(x) \le g(x)$, $\forall x \in \mathrm{R}$, then show that $\lim_{x \to a} f(x) \le \lim_{x \to a} g(x)$. 4

(b) Test the conditional convergence of the series : 4

$$1 - 2^{-1/3} + 3^{-1/3} - 4^{1/3} + ...$$

(c) Prove that : 2

$$\sin x < x,$$

when $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$

3. (a) State the second mean value theorem of integrability. Verify it for the functions f and g defined by 5

$$f(x) = -2x \text{ and } g(x) = 3x \text{ on } [2, 3].$$

(b) Check, whether the intervals, [4, 7] and [6, 9] are equivalent or not. 2

(c) Check, whether or not, the sequence $\frac{(-1)^n}{n}$ is convergent. 3

4. (a) Evaluate the following : 4

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\left[\frac{1}{\sqrt{(n+2)^3}}+\frac{1}{\sqrt{(n+4)^3}}+\frac{1}{\sqrt{(n+6)^3}}+\ldots.+\frac{1}{\sqrt{(7n)^3}}\right]$$

(b) Using the principle of induction, prove that 7 is a factor of 3

$$2^{n+1}+3^{2n-1}, \text{ for all } n \in \mathbf{N}.$$

(c) Define a countable set. Is the set of all prime numbers countable ? 3

5. (a) Give an example of a compact set which is not an interval. Justify your choice of example. 2

(b) Calculate the upper and lower integrals of the function f defined in [0, 1] by : 4

$$f(x)=\begin{cases}3, & \text{when } x \text{ is rational}\\ 0, & \text{when } x \text{ is irrational}\end{cases}$$

Is the function f Riemann integrable ? Justify your answer.

(c) Check the convergence of the series : 4

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

6. (a) Find the local maximum and the local minimum values of the function : 4

$$f(x) = 2x^3 - 4x^2 - 8x + 15$$

(b) Define uniform continuity of a function. Give an example of a uniformly continuous function. Justify your choice of example. 3

(c) Test the convergence of the following series : 3

$$\frac{1}{2.3} + \frac{\sqrt{2}}{4.5} + \frac{\sqrt{3}}{6.7} + ...$$

7. Which of the following statements are true ? Give reasons for your answers : 10

(a) The sum of two discontinuous functions is always discontinuous.

(b) There exists a convergent sequence. which has an unbounded subsequence.

(c) 3 is not a limit point of the interval [– 2, 5].

(d) An integrable function is differentiable.

(e) The function $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ defined by :

$$f(x) = |2 - x| + |x - 3|$$

is not differentiable at $x = -1$.

MTE–09

स्नातक उपाधि कार्यक्रम (बी. डी. पी.)

सत्रांत परीक्षा

जून, 2025

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित

एम.टी.ई.–09 : वास्तविक विश्लेषण

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

भारिता : 70%

नोट : *कुल **पाँच** प्रश्न कीजिए। प्रश्न संख्या 7 अनिवार्य है। प्रश्न संख्या **1** से **6** तक से कोई **चार** प्रश्न कीजिए। कैल्कुलेटर के उपयोग की अनुमति नहीं है।*

1. (क) दर्शाइए कि वक्र $y = 4x^2 - 5x + 7$ पर स्थित उन बिन्दुओं को मिलाने वाली जीवा, जिनके भुज $x = 2$ और $x = 3$ हैं, भुज $x = \frac{5}{2}$ वाले बिन्दु पर स्पर्शरेखा के समान्तर होती है। 4

   (ख) m और n के वे मान ज्ञात कीजिए, जिससे 4

$$\lim_{x \to 0} \frac{x(1 + m\cos x) - n\sin x}{x^3} = -\frac{1}{4}$$

हो।

(ग) असमिका $-3 \leq x - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}$ को मापांक रूप में लिखिए। 2

2. (क) यदि सीमाओं $\lim_{x \to a} f(x)$ और $\lim_{x \to a} g(x)$ के अस्तित्व हैं तथा $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in \mathrm{R}$ है, तो दर्शाइए कि $\lim_{x \to a} f(x) \leq \lim_{x \to a} g(x)$ है। 4

(ख) श्रेणी $1 - 2^{-1/3} + 3^{-1/3} - 4^{1/3} + ...$ की सप्रतिबंध अभिसारिता की जाँच कीजिए। 4

(ग) सिद्ध कीजिए कि : 2

$$\sin x < x$$

जब $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$ है।

3. (क) समाकलनीयता की द्वितीय माध्य मान प्रमेय का कथन दीजिए। [2, 3] पर $f(x) = -2x$ और $g(x) = 3x$ द्वारा परिभाषित फलनों f और g के लिए, इसका सत्यापन कीजिए। 5

(ख) जाँच कीजिए कि अन्तराल [4, 7] और [6, 9] समतुल्य हैं या नहीं। 2

(ग) जाँच कीजिए कि अनुक्रम $\frac{(-1)^n}{n}$ अभिसारी है या नहीं। 3

4. (क) निम्नलिखित का मान निकालिए : 4

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\left[\frac{1}{\sqrt{(n+2)^3}}+\frac{1}{\sqrt{(n+4)^3}}+\frac{1}{\sqrt{(n+6)^3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{(7n)^3}}\right]$$

(ख) आगमन के सिद्धान्त का उपयोग करते हुए, सिद्ध कीजिए कि सभी $n \in \mathbf{N}$ के लिए $2^{n+1}+3^{2n-1}$ का 7 एक गुणनखंड है। 3

(ग) एक गणनीय समुच्चय को परिभाषित कीजिए। क्या सभी अभाज्य संख्याओं का समुच्चय गणनीय है ? 3

5. (क) एक ऐसे संहत समुच्चय का उदाहरण दीजिए जो एक अन्तराल नहीं है। अपने चुने हुए उदाहरण की पुष्टि कीजिए। 2

(ख) अन्तराल [0, 1] में

$$f(x) = \begin{cases} 3, & \text{जब } x \text{ परिमेय है} \\ 0, & \text{जब } x \text{ अपरिमेय है} \end{cases}$$

द्वारा परिभाषित फलन f के उपरि और निम्न समाकलों को परिकलित कीजिए। क्या फलन f रीमान समाकलनीय है। अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। 4

(ग) श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ की अभिसारिता की जाँच कीजिए। 4

6. (क) फलन $f(x) = 2x^3 - 4x^2 - 8x + 15$ के स्थानीय अधिकतम और स्थानीय निम्नतम मान ज्ञात कीजिए। 4

(ख) एक फलन की एकसमान संततता को परिभाषित कीजिए। किसी एकसमान संतत फलन का एक उदाहरण दीजिए। अपने चुने हुए उदाहरण की पुष्टि कीजिए। 3

(ग) श्रेणी $\frac{1}{2.3} + \frac{\sqrt{2}}{4.5} + \frac{\sqrt{3}}{6.7} + \dots\dots$ की अभिसारिता की जाँच कीजिए। 3

7. निम्नलिखित में से कौन–से कथन सत्य हैं ? अपने उत्तरों के लिए कारण दीजिए : 10

(क) दो असंतत फलनों का योग सदैव असंतत होता है।

(ख) एक अभिसारी अनुक्रम का अस्तित्व है, जिसका एक अपरिबद्ध उपअनुक्रम है।

(ग) अन्तराल का $[-2, 5]$ का 3 एक सीमा बिन्दु नहीं है।

(घ) एक समाकलनीय फलन अवकलनीय होता है।

(ङ) $f(x) = |2-x| + |x-3|$ द्वारा परिभाषित फलन $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ बिन्दु $x = -1$ पर अवकलनीय नहीं होता है।

× × × × ×