No. of Printed Pages : 14 **MTE–11**

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)

Term-End Examination

June, 2025

Elective Course : Mathematics

MTE-11 : PROBABILITY AND STATISTICS

Time : 2 Hours *Maximum Marks : 50*

Weightage : 70%

Note : *(i) Q. No.* ***7*** *is compulsory.*

(ii) Attempt any ***four*** *questions from Q. Nos.* ***1*** *to* ***6****.*

(iii) Symbols have their usual meanings.

(iv) Use of calculator is not allowed.

---

1. (a) The yield (in kg) of 100 plots in the form of grouped frequency distribution is given below :

Yield (in kg)	Frequency
0—20	6
20—40	26
40—60	35
60—80	23
80—100	10

Calculate mean and standard deviation of the yield. 5

(b) If X and Y are independent random variables with moment generating functions M_X (t) any $M_Y(t)$ respectively, then show that : 3

$$M_{X+Y}(t) = M_X(t).M_Y(t)$$

(c) Show that the function defined as :

$$f(x) = 6x(1-x); \quad 0 \le x \le 1$$

is a probability density function. 2

2. (a) Let a random variable X follows the following p.d.f. : 5

$$f(x) = \begin{cases} ke^{-\frac{x}{3}}; & x > 0 \\ 0 \; ; & x \le 0 \end{cases}$$

(i) Find k.

(ii) Obtain mean and variance of X.

(b) The probability that A hits a target is $\frac{1}{3}$ and the probability that B hits it is $\frac{2}{5}$. What is the probability that the target will be hit, if each one of them shoots at the target ? 3

(c) If P(A) = 0.26, P (B) = 0.35 and P (A and B) = 0.14, what is the value of P (A or B) ? 2

3. (a) A binomial variable X satisfies the relation :

$$9P[X = 4] = P[X = 2]$$

when n = 6. Find the probability of success. Also, find mean and variance of X. 4

(b) Let $X_1, X_2, ..., X_n$ be random sample of size n from a distribution with p.d.f. :

$$f(x, \theta) = \begin{cases} 8x^{\theta-1}; & 0 < x < 1, \theta > 0 \\ 0 \quad ; & \text{elsewhere} \end{cases}$$

Obtain a maximum likelihood estimator of θ. 4

(c) I single letter is selected at random from the word 'PROBABILITY'. What is the probability that it is a vowel ? 2

4. (a) For geometric distribution : 6

$$P[X = x] = \frac{e^{-2} 2^x}{x!}; \quad x = 0, 1, 2, 3......$$

find :

(i) Mean and variance of the distribution.

(ii) $P\left[|X-2|\leq 2\right]$

(iii) a lower bound for the probability computed in part (ii).

(b) In an intelligence test administered to 1000 children, the average score is 42 and standard deviation is 24. Find the number of children having score : 4

(i) more than 60; and

(ii) between 20 and 40

[You may use the following values :

$\phi(0.75)=0.7734$, $\phi(-0.91) = 0.8$[illegible],

$\phi(-0.083) = 0.5331$, $\phi(-0.09)=0.5359$,

$\phi(0.65)=0.7422$]

5. (a) For 10 observations on price (X) and supply (Y), the following data was obtained :

$\Sigma X=130$, $\Sigma Y=200$, $\Sigma X^2 = 228$,

$\Sigma Y^2=5506$ and $\Sigma XY=3467$

Obtain the line of regression of Y on X and estimate supply when the price is 16 units. 5

(b) The following table gives the number of road accidents that occurred during the various days of the week : 5

Day	No. of Accidents
Monday	14
Tuesday	15
Wednesday	8
Thursday	20
Friday	11
Saturday	9
Sunday	14

Test whether the accidents are uniformly distributed over the week at 1% level of significance.

[You may use $\chi^2_{0.01,6} = 16.81$].

6. (a) A factory produces a certain type of product by 3 machines. The respective daily production are :

Machine X : 3000 units

Machine Y : 2500 units

Machine Z : 4500 units

Past experience shows that 1% of products produced by machine X, 1.2% by machine Y and 2% by machine Z are defective. A product is drawn at random. What is the probability that it has been produced by Machine Y, if the drawn item is found to be defective. 5

(b) Consider the following joint p.d.f.s :

$$f(x, y) = \begin{cases} 2; & 0 < x < y < 1 \\ 0; & \text{otherwise} \end{cases}$$

(i) Find marginal distributions of X and Y. 2

(ii) Check whether X and Y are independent or not. 2

(iii) Find $f\left(\frac{x}{y}\right)$. 1

7. Which of the following statements are true *or* false ? Give a short proof or a counter-example in support of your answer : 5×2=10

(i) For two independent events A and B, if P(A) = 0.2 and P(B) = 0.4, then P (A ⋂ B) = 0.6.

(ii) If T is an unbiased estimator for θ, then T^2 is an unbiased estimator for θ^2.

(iii) If the moment generating function of X is e^{32t^2}, then $E(X) = 0$ and Var (X) = 64.

(iv) If X_1, X_2, ...X_n is a random sample from a normal population with mean μ and variance σ^2, then $\bar{X}$ is normally distributed with mean μ and variance σ^2.

(v) For a positively skewed distribution : Mean < Median < Mode.

MTE–11

स्नातक उपाधि कार्यक्रम

(बी. डी. पी.)

सत्रांत परीक्षा

जून, 2025

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित

एम.टी.ई.–11 : प्रायिकता और सांख्यिकी

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

भारिता : 70%

नोट : *(i) प्रश्न सं. **7** करना अनिवार्य है।*

*(ii) प्रश्न सं. **1** से **6** तक कोई **चार** प्रश्न कीजिए।*

(iii) सांकेतकों के अपने सामान्य अर्थ हैं।

(iv) कैल्कुलेटर का प्रयोग करने की अनुमति नहीं है।

1. (क) 100 प्लॉटों की पैदावार (kg में) का सामूहिक बारंबारता बंटन निम्नलिखित है :

पैदावार (kg में)	बारंबारता
0—20	6
20—40	26
40—60	35
60—80	23
80—100	10

पैदावार का माध्य और मानक विचलन ज्ञात कीजिए। 5

(ख) यदि दो स्वतंत्र यादृच्छिक चर X और Y हैं जिनके आघूर्ण जनक फलन क्रमशः $M_X(t)$ और $M_Y(t)$ हैं, तो दर्शाइए कि $M_{X+Y}(t) = M_X(t).M_Y(t)$ । 3

(ग) दर्शाइए कि :

$$f(x) = 6x(1-x); \quad 0 \le x \le 1$$

द्वारा परिभाषित फलन एक प्रायिकता घनत्व फलन है।

2

2. (क) मान लीजिए कि एक यादृच्छिक चर X का p.d.f. निम्नलिखित है : 5

$$f(x) = \begin{cases} ke^{-\frac{x}{3}}; & x > 0 \\ 0 \;; & x \le 0 \end{cases}$$

(i) k ज्ञात कीजिए।

(ii) X का माध्य और प्रसरण ज्ञात कीजिए।

(ख) A द्वारा एक लक्ष्य पर निशाना लगाने की प्रायिकता $\frac{1}{3}$ और B द्वारा निशाना लगाने की प्रायिकता $\frac{2}{5}$ है। वह प्रायिकता क्या है कि लक्ष्य पर निशाना लगेगा, यदि उनमें से प्रत्येक लक्ष्य पर बंदूक चलाता है ? 3

(ग) यदि $P(A) = 0.26, P(B) = 0.35$ और $P(A$ और $B) = 0.14$ है, तो $P(A$ या $B)$ का मान क्या है ? 2

3. (क) एक द्विपद चर X, संबंध $9P[X=4] = P[X=2]$, जहाँ $n = 6$, को संतुष्ट करता है। सफलता की प्रायिकता ज्ञात कीजिए। X का माध्य और प्रसरण भी ज्ञात कीजिए। 4

(ख) मान लीजिए कि आकार n वाला एक यादृच्छिक प्रतिदर्श $X_1, X_2, \ldots\ldots\ldots, X_n$ निम्नलिखित प्रायिकता घनत्व फलन वाले बंटन से लिया गया है :

$$f(x, \theta) = \begin{cases} 8x^{\theta-1}; & 0 < x < 1, \theta > 0 \\ 0 \;\;; & \text{अन्यथा} \end{cases}$$

θ का अधिकतम संभावित आकलक ज्ञात कीजिए। 4

(ग) शब्द 'PROBABILITY' से एक एकल अक्षर यादृच्छया चुना जाता है। वह प्रायिकता क्या है कि यह एक स्वर (vowel) है ? 2

4. (क) ज्यामितीय बंटन 6

$$P[X = x] = \frac{e^{-2} 2^x}{x!}; \quad x = 0, 1, 2, 3, \ldots\ldots$$

के लिए ज्ञात कीजिए :

(i) बंटन के माध्य और प्रसरण

(ii) $P[|X-2|\leq 2]$

(iii) भाग (ii) में परिकलित प्रायिकता का निम्न परिबद्ध।

(ख) 1000 बच्चों पर किए गये एक बुद्धि परीक्षण का माध्य स्कोर 42 और मानक विचलन 24 है। बच्चों की वह संख्या ज्ञात कीजिए जिनका स्कोर : 4

(i) 60 से अधिक है; और

(ii) 20 और 40 के बीच है।

[आप निम्नलिखित मानों का प्रयोग कर सकते है :

$\phi(0.75)=0.7734$, $\phi(-0.91)=0.8186$, $\phi(-0.083) = 0.5331$, $\phi(-0.09)=0.5359$, $\phi(0.65)=0.7422$]

5. (क) मूल्य (X) और पूर्ति (Y) के 10 प्रेक्षणों के लिए निम्नलिखित आँकड़े प्राप्त किए गए :

$\Sigma X=130$, $\Sigma Y=200$, $\Sigma X^2=2288$, $\Sigma Y^2=5506$ एवं $\Sigma XY=3467$

X पर Y की समाश्रयण रेखा प्राप्त कीजिए और 16 इकाई मूल्य के लिए पूर्ति निकालिए। 5

(ख) सप्ताह के विभिन्न दिनों में होने वाली सड़क दुर्घटनाओं की संख्या निम्नलिखित तालिका में दी गई है : 5

दिन	दुर्घटनाओं की संख्या
सोमवार	14
मंगलवार	15
बुधवार	8
बृहस्पतिवार	20
शुक्रवार	11
शनिवार	9
रविवार	14

जाँच कीजिए कि 1% सार्थकता स्तर पर दुर्घटनाएँ सप्ताह के दिनों में एकसमान बंटित हैं।

[आप $\chi^2_{0.01,6} = 16.81$ का प्रयोग कर सकते हैं।]

6. (क) एक फैक्टरी एक विशेष उत्पाद 3 मशीनों द्वारा बनाती है। दैनिक उत्पादन क्रमशः हैं :

मशीन X : 3000 इकाइयाँ

मशीन Y : 2500 इकाइयाँ

मशीन Z : 4500 इकाइयाँ

पिछला अनुभव दर्शाता है कि मशीन X द्वारा निर्मित उत्पादों का 1%, मशीन Y द्वारा निर्मित उत्पादों का 1.2% और मशीन Z द्वारा निर्मित उत्पादों के 2% उत्पाद खराब हैं। एक उत्पाद यादृच्छया चुना जाता है। यदि चुना गया उत्पाद खराब पाया जाता है, तो वह प्रायिकता क्या है कि यह उत्पाद मशीन Y द्वारा निर्मित है ? 5

(ख) निम्नलिखित संयुक्त p.d.f. मानिए :

$$f(x,y) = \begin{cases} 2\ ; & 0 < x < y < 1 \\ 0\ ; & \text{अन्यथा} \end{cases}$$

(i) X और Y के सीमांत बंटन ज्ञात कीजिए। 2

(ii) जाँच कीजिए कि X और Y स्वतंत्र हैं या नहीं। 2

(iii) $f\left(\frac{x}{y}\right)$ ज्ञात कीजिए। 1

7. निम्नलिखित कथनों में से कौन–से कथन सत्य या असत्य हैं ? अपने उत्तर के पक्ष में संक्षिप्त उपपत्ति या प्रति–उदाहरण दीजिए : 5×2=10

(i) दो स्वतंत्र घटनाओं A और B के लिए यदि $P(A)=0.2$ और $P(B)=0.4$ है, तो $P(A \cap B)=0.6$ होगा।

(ii) यदि T, θ के लिए एक अनभिनत आकलक है, तो T^2, θ^2 के लिए एक अनभिनत आकलक होगा।

(iii) यदि X का आघूर्ण जनक फलन e^{32t^2} है, तो $E(X)=0$ और $\text{Var}(X) = 64$ होगा।

(iv) यदि माध्य μ और प्रसरण σ^2 वाली एक प्रसामान्य समष्टि से लिया गया यादृच्छिक प्रतिदर्श $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$ है, तो $\bar{X}$ माध्य μ और प्रसरण σ^2 के साथ प्रसामान्य रूप से बंटित है।

(v) एक धनात्मक रूप से विषममित बंटन के लिए :

माध्य < माध्यिका < बहुलक

× × × × ×