

**BACHELOR'S DEGREE
PROGRAMME (BDP)**

Term-End Examination

June, 2025

Elective Course : Mathematics

MTE-14 : MATHEMATICAL MODELLING

Time : 2 Hours

Maximum Marks : 50

Weightage : 70%

Note : (i) Attempt any **five** questions.

(ii) All questions carry equal marks.

(iii) Use of calculator is not allowed.

(iv) Symbols have their usual meanings.

1. (a) The population of fish in a reservoir is affected by both fishing and restocking. The proportionate birth rate is constant at 0.5 per year and proportionate death rate is constant at 0.6 per year. The reservoir is restocked at a constant rate of 3000 fishes per year and fishermen

are allowed to catch 1500 fish per year. Using these assumptions, derive a model for the fish population and solve it. Describe the long-term behaviour of the fish population when the initial population is 6000. 5

- (b) A particle falls from rest in a medium in which the resistance is λv^2 per unit mass, where λ is a constant and v is the velocity. Prove that the distance fallen in time t is $\frac{1}{\lambda} \ln(\cosh t \sqrt{g\lambda})$. 5

2. (a) Modelling a problem can be done in several ways. We give below the different problems related to tumour growth. Identify the type of model (deterministic, continuous, stochastic or discrete) which is most appropriate in each of the following situations : 4

- (i) Effect of treatment given at regular intervals.

- (ii) Effect of drugs on a patient who is given the drug for a given duration of time.
 - (iii) Effect of a radiation on tumour cells. Some cells may continue to grow but some may be damaged.
 - (iv) Finding the time taken for a tumour to double in size.
- (b) A satellite is orbiting the earth in a circular orbit at an altitude of approximately 1600 km. Estimate the velocity of the satellite and the time period given that the radius of the Earth is 6400 km. (Take $g = 10 \text{ m/s}^2$). 6
3. (a) A particle executes simple harmonic motion. Its velocities are 8 cm/sec and 6 cm/sec when it is at distances of 3 cm and 4 cm, respectively, from the mean position. Find its time period and maximum acceleration. 4

- (b) The sales in a mall since 2016 is given below : 6

Year	Sales (in ₹ lakhs)
2016	8
2017	10
2018	7
2019	11
2020	12
2021	9

What is the least square trend-line equation, using 2016 as the zero-year ?

4. (a) At any instant a particle is projected with a velocity μ in a direction making an angle α with the horizontal direction. After a certain interval t , the direction of its path makes an angle β with the horizontal direction. Prove that :

$$u \cos \alpha = \frac{gt}{(\tan \alpha - \tan \beta)}.$$

Further, prove that direction of motion turns through an angle θ in time

$$\left[\frac{u \sin \theta}{g \cos(\theta - \alpha)} \right]. \quad 6$$

- (b) The volume rate of flow Q of a liquid through a tube is supposed to depend on pressure drop per unit length, the diameter d of the tube and the viscosity μ . Using dimensional analysis, show

that $Q = (\text{constant}) \times \left(\frac{d^4}{\mu} \right) \left(\frac{\Delta p}{l} \right)$, where

Δp is the change in pressure and l is the length of the tube. 4

5. (a) In a car garage with a single server system, cars arrive at a rate of 36 cars per day. Assuming that inter-arrival time follows an exponential distribution and the service time for repairing each of the cars is also exponential with an average of 20 minutes, calculate the following : 4

- (i) Average number of cars in the queue.
- (ii) The probability that the queue size is greater than or equal to 6.

- (b) A model corresponding to the cooperative interaction between two species x and y is given by :

$$\frac{dx}{dt} = 60x - 4x^2 - 3xy$$

$$\frac{dy}{dt} = 42y - 2y^2 - 3xy$$

Find all the equilibrium points of the system and discuss the stability of the system at the possible co-existence point.

6

6. (a) A drug is induced in a patient's bloodstream at a constant rate of r gm/sec. Simultaneously the drug is removed at a rate proportional to the amount $x(t)$ of the drug present at any time t . Determine the differential equation governing the amount $x(t)$. If the initial concentration of the drug in the bloodstream is x_0 , find the concentration of the drug at any time t .

5

- (b) Consider the following cubic total cost function :

$$C = 0.04q^3 - 0.8q^2 + 10q + 5$$

Assume that the price of q is 13 per unit. Find the output which yields maximum profit. 5

7. (a) When $\rho_{12} = -1.0$, the standard deviation of a two-security portfolio P is equal to the weighted average of the standard deviations of its component securities. Is it true or false ? Justify your answer. (ρ_{12} is the correlation coefficient of securities 1 and 2.) 4
- (b) An investor has ₹ 50,000 to invest in stocks. He has two possible strategies : buy conservative blue chip stocks or buy highly speculative stocks. There are two states of nature : the market goes up or the market goes down. The following

pay-off matrix shows the various circumstances : 6

Investor	Market up	Market down
Buy Blue Chip	₹ 24,000	₹ 16,000
Buy Speculative	₹ 35,000	₹ 12,000

What should the investor do if he is :

- (i) an optimist ?
- (ii) a pessimist ?
- (iii) What is the best strategy, if the probability of a market rise is 0.3 ?

MTE-14**स्नातक उपाधि कार्यक्रम (बी. डी. पी.)****सत्रांत परीक्षा****जून, 2025****ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित****एम.टी.ई.-14 : गणितीय निदर्शन**

समय : 2 घण्टे

अधिकतम अंक : 50

भारिता : 70%

नोट : (i) किन्हीं पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

(ii) सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

(iii) कैल्कुलेटर का प्रयोग करने की अनुमति नहीं है।

(iv) प्रतीकों के अपने सामान्य अर्थ हैं।

1. (क) मछली पकड़ने और पुनःस्थापन करने से जलाशय में मछलियों की संख्या पर प्रभाव पड़ता है। इसकी आनुपातिक जन्म-दर 0.5 प्रति वर्ष पर अचर है और आनुपातिक मृत्यु-दर 0.6 प्रति वर्ष पर अचर है। जलाशय का पुनःस्थापन 3000 मछली प्रति वर्ष की अचर दर से किया जाता है और मछुआरों को प्रति वर्ष

1500 मछलियाँ पकड़ने की अनुमति होती है। इन कल्पनाओं की सहायता से मछली समष्टि का निदर्श व्युत्पन्न कीजिए और उसे हल कीजिए। जब प्रारम्भिक समष्टि 6000 हो, तो मछली समष्टि के दीर्घकालिक व्यवहार का वर्णन कीजिए। 5

(ख) एक कण किसी माध्यम में विरामावस्था से नीचे गिरता है जिसमें प्रतिरोध λv^2 प्रति इकाई द्रव्यमान है, जहाँ λ अचर है और v वेग है। सिद्ध कीजिए कि गिरने में समय t में कण द्वारा तय की गई दूरी $\frac{1}{\lambda} \ln(\cosh t \sqrt{g\lambda})$ होगी। 5

2. (क) समस्या का निदर्शन कई विधियों से किया जा सकता है। नीचे हमने ट्यूमर वृद्धि से संबंधित विभिन्न समस्याएँ दी हैं। निम्नलिखित प्रत्येक स्थिति में निदर्श के सबसे उत्तम प्रकार (निर्धारणात्मक, संतत, प्रसंभाव्य या अंसतत) को पहचानिए : 4

(i) नियमित अंतरालों पर दिए गए उपचार का प्रभाव

- (ii) एक रोगी, जिसे दी गई अवधि तक दवा दी गई हो, पर दवा का प्रभाव
- (iii) द्यूमर कोशिकाओं पर विकिरण (radiation) का प्रभाव। कुछ कोशिकाओं की वृद्धि जारी रह सकती है जबकि कुछ को क्षति हो सकती है।
- (iv) द्यूमर के आमाम को दुगुना होने में लगने वाले समय को ज्ञात करना।

(ख) एक उपग्रह पृथ्वी की वृत्ताकार कक्षा में लगभग 1600 किलोमीटर की ऊँचाई पर घूम रहा है। उपग्रह के वेग और आवर्तकाल का आकलन कीजिए, यह मानकर कि पृथ्वी की त्रिज्या 6400 किलोमीटर है। ($g = 10 \text{ m/s}^2$ लीजिए)। 6

3. (क) एक कण की गति सरल आवर्त गति है। जब कण माध्य स्थिति से क्रमशः 3 cm और 4 cm की दूरी पर होता है, तो इसके वेग क्रमशः 8 cm/sec और 6 cm/sec होते हैं। इसका आवर्तकाल और अधिकतम त्वरण ज्ञात कीजिए। 4

(ख) वर्ष 2016 से एक मॉल की बिक्री नीचे दी गई है : 6

वर्ष	बिक्री (लाखों ₹ में)
2016	8
2017	10
2018	7
2019	11
2020	12
2021	9

वर्ष 2016 को शून्य-वर्ष मानकर न्यूनतम वर्ग उपनति-रेखा समीकरण क्या है ?

4. (क) किसी भी क्षण एक कण को क्षैतिज दिशा के साथ कोण α बनाते हुए वेग μ के साथ प्रक्षेपित किया गया। एक निश्चित अंतराल t के बाद कण के पथ की दिशा क्षैतिज दिशा के साथ कोण β बनाती है। सिद्ध कीजिए कि :

$$\mu \cos \alpha = \frac{gt}{(\tan \alpha - \tan \beta)}$$

इसके आगे यह भी सिद्ध कीजिए कि गति की दिशा

$$\text{समय } \left[\frac{u \sin \theta}{g \cos(\theta - \alpha)} \right] \text{ में कोण } \theta \text{ से बदल जाती}$$

है।

(ख) नली से तरल के प्रवाह की आयतन दर Q ; दाब गिरावट प्रति इकाई लम्बाई; नली के व्यास d और श्यानता μ पर आधारित है। विमीय विश्लेषण द्वारा दिखाइए कि $Q = (\text{स्थिरांक}) \times \left(\frac{d^4}{\mu}\right)\left(\frac{\Delta p}{l}\right)$, जहाँ Δp दाब में परिवर्तन है और l नली की लम्बाई है। 4

5. (क) एकल सेवा प्रणालीयुक्त एक कार के गैराज में, 36 कार प्रतिदिन की दर से कारें आती हैं। यह मानकर कि अंतर-आगमन समय एक चरघातांकी बंटन का अनुपालन करता है और प्रत्येक कार की मरम्मत में लगने वाला समय 20 मिनट के औसत वाला चरघातांकी है, निम्नलिखित को परिकलित कीजिए : 4
- पंक्ति में लगी कारों की औसत संख्या
 - पंक्ति का साइज 6 से अधिक या 6 के बराबर होने की प्रायिकता।

(ख) दो स्पीशीज x और y के बीच सहकारी
अन्योन्यक्रिया का संगत निदर्श दिया गया है :

$$\frac{dx}{dt} = 60x - 4x^2 - 3xy$$

$$\frac{dy}{dt} = 42y - 2y^2 - 3xy$$

निकाय के सभी साम्य बिन्दु ज्ञात कीजिए और इन
बिन्दुओं पर निकाय के स्थायित्व की चर्चा कीजिए। 6

6. (क) कोई दवाई एक रोगी की रक्त धारा में r ग्राम/सेकण्ड की अचर दर से प्रवाहित की जा रही है। इसके साथ ही, यह दवाई किसी भी समय t पर उपस्थित दवाई की मात्रा $x(t)$ के समानुपाती दर से निकाली जा रही है। मात्रा $x(t)$ नियंत्रित करने वाला अवकल समीकरण निर्धारित कीजिए। यदि रक्तधारा में दवाई की प्रारंभिक सांद्रता x_0 है, तो किसी भी समय t पर इस दवाई की सांद्रता ज्ञात कीजिए। 5

(ख) निम्नलिखित त्रिघात कुल लागत फलन लीजिए :

$$C = 0.04q^3 - 0.8q^2 + 10q + 5$$

मान लीजिए कि q की कीमत प्रति इकाई 13 है। वह निर्गत ज्ञात कीजिए जिससे अधिकतम लाभ प्राप्त होता है।

5

7. (क) जब $\rho_{12} = -1.0$, तो एक दो-सिक्क्योरिटी पोर्टफोलियो P का मानक विचलन उसकी घटक सिक्क्योरिटीज के मानक विचलनों के भारित औसत के बराबर है। क्या यह सत्य है या असत्य ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। (ρ_{12} सिक्क्योरिटीज 1 और 2 का सहसंबंध गुणांक है।)

4

(ख) एक निवेशक के पास स्टॉक में निवेश करने के लिए ₹ 50,000 हैं। इसके पास दो संभावित कार्यनीतियाँ हैं : या तो संरक्षी (कम जोखिम का) ब्लू चिप स्टॉक्स को खरीदे अथवा अत्यधिक काल्पनिक स्टॉक्स खरीदे। दो तरीके की संभावनाएँ हैं : बाजार ऊपर जाएगा या बाजार गिरेगा। अग्रलिखित पे-ऑफ आव्यूह विभिन्न परिस्थितियों को प्रदर्शित करता है :

6

निवेशक	बाजार ऊपर जाने पर	बाजार के गिरने पर
ब्लू चिप खरीदे	₹ 24,000	₹ 16,000
काल्पनिक खरीदे	₹ 35,000	₹ 12,000

निवेशक को क्या करना चाहिए, यदि वह :

- (i) एक आशावादी है ?
- (ii) एक निराशावादी है ?
- (iii) यदि बाजार के बढ़ने की प्रायिकता 0.3 है, तो
श्रेष्ठ कार्यनीति क्या है ?

× × × × ×