No. of Printed Pages : 10 **PHE–14**

BACHELOR OF SCIENCE (B. Sc.)

Term-End Examination

June, 2025

PHE-14 : MATHEMATICAL METHODS IN PHYSICS—III

Time : 2 Hours *Maximum Marks : 50*

Note : *Attempt all questions. The marks for each question are indicated against it. Symbols have their usual meanings.*

1. Attempt any *five* parts : 5×2=10

(a) Determine the eigen values of :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

(b) Does the set of all non-singular square matrices of order n form a group under matrix multiplication ?

(c) Locate and name the singularities of the following function :

$$f(z) = \frac{\sin\left(\frac{1}{z}\right)}{(z-i)^2}$$

(d) Calculate the residue of the function $\frac{e^z}{(z-2)^2}$.

(e) Obtain the Fourier sine transform of the function :

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 0, & x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

(f) Calculate the Laplace transform of $\cosh at$.

(g) Using Rodrigues' formula :

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$$

for Legendre polynomials, obtain $P_2(x)$.

(h) Plot Bessel function of the first kind of order 0 and 1.

2. Attempt any *two* parts : 2×5=10

(a) If a real matrix is both symmetric and orthogonal, show that its eigen values can be only $+1$ or -1.

(b) Diagonalize the matrix :

$$P = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

(c) If A^{ij} is an antisymmetric tensor and B_i is a vector, show that $A^{ij} B_i B_j = 0$.

3. Attempt any *two* parts : 2×5=10

(a) Evaluate the integral :

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+4}$$

(b) Discuss the analyticity of the function :

$$f(z) = e^y (\cos x + i \sin x)$$

(c) Write the Laurent's series expansion of $\frac{e^z}{(z-1)^2}$ about $z=1$. Determine the type of singularity and the region of convergence.

4. Attempt any *two* parts : 2×5=10

(a) Determine the Fourier transform of

$f(x) = e^{-x^2}$.

(b) Calculate the inverse Laplace transform

of $\frac{s-3}{s^2-1}$.

(c) Using the Laplace transform, solve the initial value problem :

$y'' + 4y' + 3y = 0, \; y(0) = 3, \; y'(0) = 1$.

5. Attempt any *one* part : 1×10=10

(a) Using the generating function for Legendre polynomials :

$$g(x,t) = \frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n$$

obtain the recurrence relations :

$$(2n+1)x P_n(x) = (n+1) P_{n+1}(x) + n P_{n-1}(x)$$

and

$$2x P_n'(x) + P_n(x) = P_{n+1}'(x) + P_{n-1}'(x)$$

7+3

(b) Using the generating function for Hermite polynomials : 10

$$g(x,t) = e^{2xt - t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{t^n}{n!}$$

Obtain Rodrigues' formula for the Hermite polynomials.

PHE–14

विज्ञान स्नातक (बी. एस.-सी.)

सत्रांत परीक्षा

जून, 2025

पी.एच.ई.-14 : भौतिकी में गणितीय विधियाँ—III

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

नोट : *सभी प्रश्न हल कीजिए। प्रत्येक प्रश्न के अंक उसके सामने दिए गए हैं। प्रतीकों के अपने सामान्य अर्थ हैं।*

1. कोई **पाँच** भाग कीजिए : 5×2=10

(क) $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ के आइगेन मान ज्ञात कीजिए।

(ख) क्या आव्यूह गुणन के अधीन कोटि n वाले सभी व्युत्क्रमणीय वर्ग आव्यूहों के समुच्चय से एक समूह बनता है ?

(ग) निम्नलिखित फलन की विचित्रताओं का निर्धारण कीजिए और उनके नाम बताइए :

$$f(z) = \frac{\sin\left(\frac{1}{z}\right)}{(z-i)^2}$$

(घ) फलन $\frac{e^z}{(z-2)^2}$ का अवशिष्ट परिकलित कीजिए।

(ङ) फलन :

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 0, & x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

का फूरिये साइन रूपांतर प्राप्त कीजिए।

(च) $\cosh at$ का लाप्लास रूपांतर प्राप्त कीजिए।

(छ) लैजेण्ड्र बहुपदों के रोड्रिगेज के सूत्र

$\mathrm{P}_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n$ का उपयोग कर

$\mathrm{P}_2(x)$ का मान ज्ञात कीजिए।

(ज) कोटि 0 और 1 वाले प्रथम प्रकार के बेसल फलन का आरेख खींचिए।

2. कोई **दो** भाग कीजिए : 2×5=10

(क) यदि एक वास्तविक आव्यूह सममित और लाम्बिक दोनों हो, तो सिद्ध कीजिए कि इसके आइगेन मान $+1$ या -1 हो सकते हैं।

(ख) आव्यूह P का विकर्णन कीजिए :

$$\mathrm{P} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

(ग) यदि A^{ij} एक प्रतिसममित टेन्सर हो और B_i एक सदिश हो, तो दिखाइए कि $\mathrm{A}^{ij}\,\mathrm{B}_i\mathrm{B}_j = 0$ है।

3. कोई **दो** भाग कीजिए : 2×5=10

(क) निम्नलिखित समाकल का परिकलन कीजिए :

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 4}$$

(ख) फलन :

$$f(z) = e^{y}(\cos x + i\sin x)$$

की विश्लेष्यता पर चर्चा कीजिए।

(ग) $z=1$ के प्रति $\dfrac{e^z}{(z-1)^2}$ का लौरां श्रेणी प्रसार लिखिए। विचित्रता का प्रकार और अभिसरण–प्रदेश भी ज्ञात कीजिए।

4. कोई **दो** भाग कीजिए : 2×5=10

(क) फलन $f(x)=e^{-x^2}$ का फूरिये रूपांतर परिकलित कीजिए।

(ख) $\dfrac{s-3}{s^2-1}$ का व्युत्क्रम लाप्लास रूपांतर परिकलित कीजिए।

(ग) लाप्लास रूपांतर का उपयोग कर निम्नलिखित आदि मान समस्या को हल कीजिए :

$$y''+4y'+3y=0,\ y(0)=3,\ y'(0)=1$$

5. कोई **एक** भाग कीजिए : 1×10=10

(क) लैजेण्ड्रे बहुपदों के जनक फलन :

$$g(x,t)=\frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{P}_n(x)t^n$$

का उपयोग करके निम्नलिखित पुनरावृत्ति सम्बन्ध प्राप्त कीजिए : 7+3

$$(2n+1)x\,P_n(x) = (n+1)\,P_{n+1}(x) + n\,P_{n-1}(x)$$

और $2x\,P'_n(x) + P_n(x) = P'_{n+1}(x) + P'_{n-1}(x)$

(ख) हर्मिट बहुपदों के जनक फलन : 10

$$g(x,t) = e^{2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)\frac{t^n}{n!}$$

का उपयोग कर हर्मिट बहुपदों का रोड्रिगेज सूत्र प्राप्त कीजिए।

× × × × ×