No. of Printed Pages : 8

BMTC–103

BACHELOR OF SCIENCE (MATHEMATICS) (BSCFMT)

Term-End Examination

June, 2026

BMTC–103 : DISCRETE MATHEMATICS

Time : 2 Hours *Maximum Marks : 50*

Note : *(i) Question No. **1** is compulsory.*

*(ii) Attempt any **four** questions from the remaining.*

(iii) Use of calculator is not allowed.

1. State which of the following statements are true and which are false. Justify your answer with a short proof or a counter example as appropriate. Marks will be given only for proper justification. 5×2=10

   (a) For any statements p and q, $(p \wedge \sim q) \rightarrow p$ is a tautology.

(b) The number 10 has a self-conjugate partition.

(c) The recurrence relation

$$a_n = a_{n-2} + (a_{n-3} + a_{n-4})n^2$$

is linear and homogeneous with order 3.

(d) The trace of a square matrix of order n can be computed in $O(n)$ time.

(e) The ordinary generating function for the sequence (1, 2, 4, 8, ...) is $(1 - x)^{-2}$.

2. (a) Prove that for $1 \le k \le n$, the number of partitions of n with exactly k parts is equal to the number of partitions of n with k as the largest part. 3

(b) Prove that $\sum_{p+q+r=5} \binom{5}{p, q, r} = 3^5$. 3

(c) How many ways are there to choose a set of 5 cards from a deck of 52 playing cards, such that the set has at least one face card ? 4

3. (a) If 5 points are chosen at random within or the boundary of an equilateral triangle of side 1 cm, show that the distance between any *two* of the points is at most 0.5 cm. 3

(b) For $n > k > r$, show that :

$$\binom{n}{k}\binom{k}{r} = \binom{n}{r}\binom{n-r}{k-r}$$

using combinatorial arguments. 4

(c) Compute the worst case time complexity of the insertion sort algorithm. 3

4. (a) Let a_n denote the number of ways to select n shirts from 5 types of shirts, each type available in unlimited quantity. Construct the ordinary generating function for $(a_n)_{n \geq 0}$. 3

(b) Using generating functions, prove the identity : 4

$$\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r}^2 = \binom{2n}{n}$$

(c) Using the principle of mathematical induction prove that : 3

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

5. (a) Solve the recurrence relation : 5

$$a_n = n^3_{a-1} + (n!)^2,\ n \geq 1$$

where $a_0 = 1$.

(b) Set up a recurrence relation for c_n, the number of comparisons required in the worst case to sort a list of n numbers in ascending order. Also compute c_1, c_2 and c_3. 5

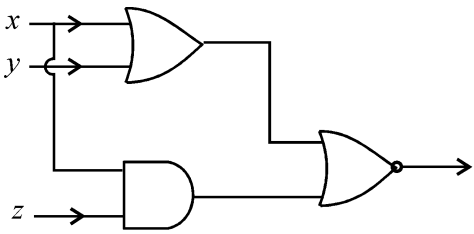
6. (a) Use truth table to show that the statement :

$$(p \to q) \wedge (q \to r) \to (p \to r)$$

holds for any statements p, q and r. 5

(b) Give a direct proof of the fact that the sum of two prime numbers, each greater than 2, is not a prime number. 2

(c) Find the output of the following logic circuit : 3



BMTC–103

विज्ञान स्नातक (गणित)

(बी. एस-सी. एफ. एम. टी.)

सत्रांत परीक्षा

जून, 2026

बी.एम.टी.सी.-103 : विविक्त गणित

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

नोट : *(i) प्रश्न संख्या **1** अनिवार्य है।*

*(ii) शेष प्रश्नों में से किन्हीं **चार** प्रश्नों के उत्तर दीजिए।*

(iii) कैल्कुलेटरों के प्रयोग की अनुमति नहीं है।

---

1. बताइए कि निम्नलिखित में से कौन-से कथन सत्य और कौन-से असत्य हैं। अपने उत्तर की पुष्टि एक लघु उपपत्ति या प्रति-उदाहरण देकर कीजिए। अंक केवल उचित पुष्टि के लिए ही दिए जाएँगे। $2\times5=10$

(क) किन्हीं भी कथनों p और q के लिए $(p\wedge\sim q)\rightarrow p$ एक सर्वसत्य कथन है।

(ख) संख्या 10 एक स्वसंयुग्मी विभाजन है।

(ग) पुनरावृत्ति सम्बन्ध $a_n = a_{n-2} + (a_{n-3} + a_{n-4})n^2$ रैखिक और समघात है जिसकी कोटि 3 है।

(घ) कोटि n वाले एक वर्ग आव्यूह का विकर्णीय योगफल $O(n)$ समय में ज्ञात किया जा सकता है।

(ङ) अनुक्रम (1, 2, 4, 8, ...) के लिए सामान्य जनक फलन $(1 - x)^{-2}$ है।

2. (क) सिद्ध कीजिए कि $1 \le k \le n$ के लिए, n के ठीक-ठीक k भाग वाले विभाजनों की संख्या n के उन विभाजनों की संख्या के बराबर है जिनका महत्तम भाग k है। 3

(ख) सिद्ध कीजिए : 3

$$\sum_{p+q+r=5} \binom{5}{p, q, r} = 3^5$$

(ग) 52 पत्तों की एक ताश की गड्डी से 5 पत्तों का चयन कितने तरीकों से किया जा सकता है यदि चयन में कम-से-कम एक मुख वाला पत्ता शामिल हो। 4

3. (क) यदि 1 सेमी. भुजा वाले एक समबाहु त्रिभुज पर या उसके अन्दर 5 बिन्दु यादृच्छया चुने जाते हैं तो दिखाइए कि उनमें से किन्हीं **दो** बिन्दुओं के बीच की दूरी अधिकतम 0.5 सेमी. होगी। 3

(ख) संचयविन्यासकीय तर्कों का प्रयोग करके, दिखाइए कि $n > k > r$ के लिए : 4

$$\binom{n}{k}\binom{k}{r} = \binom{n}{r}\binom{n-r}{k-r}$$

होता है।

(ग) निवेशन छाँट कलनविधि की निकृष्टतम काल जटिलता ज्ञात कीजिए। 3

4. (क) मान लीजिए a_n, 5 प्रकार की कमीज़ों, जिनमें से प्रत्येक प्रकार असीमित मात्रा में उपलब्ध है, में से n कमीजें चुनने के तरीकों की संख्या को दर्शाता है। $(a_n)_{n \geq 0}$ के लिए सामान्य जनक फलन प्राप्त कीजिए। 3

(ख) जनक फलनों के प्रयोग से, सर्वसमिका : 4

$$\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r}^2 = \binom{2n}{n}$$

को सिद्ध कीजिए।

(ग) गणितीय आगमन के नियम का प्रयोग करके सिद्ध कीजिए कि : 3

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

5. (क) पुनरावृत्ति संबंध :

$$a_n = n^3_{a-1} + (n!)^2, \; n \geq 1$$

को हल कीजिए, जहाँ $a_0 = 1$ है। 5

(ख) n संख्याओं की एक सूची को आरोही क्रम में व्यवस्थित करने के लिए निकृष्टतम स्थिति में आवश्यक तुलनाओं की संख्या c_n के लिए एक पुनरावृत्ति सम्बन्ध स्थापित कीजिए। साथ ही, c_1, c_2 और c_3 ज्ञात कीजिए। 5

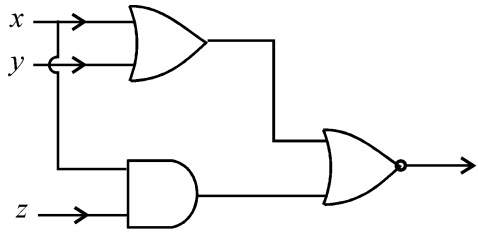
6. (क) सत्य सारणी के प्रयोग से दिखाइए कि कथन : 5

$$(p \to q) \wedge (q \to r) \to (p \to r)$$

किन्हीं भी कथनों p, q और r के लिए हमेशा सत्य है।

(ख) इस तथ्य की प्रत्यक्ष उपपत्ति दीजिए कि 2 से बड़ी दो अभाज्य संख्याओं का योगफल एक अभाज्य संख्या नहीं है। 2

(ग) निम्नांकित तर्क परिपथ का निर्गम ज्ञात कीजिए : 3



× × × × ×