No. of Printed Pages : 16 **BMTC–133**

BACHELOR OF SCIENCE (GENERAL)/BACHELOR OF ARTS (GENERAL) (BSCG/BAG)

Term-End Examination

June, 2026

BMTC-133 : REAL ANALYSIS

Time : 3 Hours *Maximum Marks : 100*

Note : *(i) Question No. **1** is compulsory.*

*(ii) Do any **six** questions from Q. Nos. **2** to **8**.*

---

1. Which of the following statements are **true** or **false** ? Justify your answer by giving a short proof or a counter-example, whichever is appropriate. 5×2=10

   (a) The negation of the statement $(A \rightarrow B)$ is $(A \vee \sim B)$.

(b) The function f defined by :

$$f(x) = |x+7|,$$

$x \in \mathbf{R}$, has a local minimum.

(c) The sequence $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$, where

$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$ is bounded.

(d) The function f defined by :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{for } x \neq 0 \\ 0, & \text{for } x = 0 \end{cases}$$

is not continuous at $x = 0$.

(e) The function, $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, defined by $f(x) = [x]$ is not integrable in [2, 4].

2. (a) Using the principle of induction, prove that 64 is a factor of $3^{2n+2} - 8n - 9$, $\forall n \in \mathbf{N}$. 5

(b) Find the Riemann sum for the function $f(x) = 2x$ for the tagged partition $\{P_n\}$ formed by the subintervals $\left[0, \frac{1}{n}\right]$, $\left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right]$......$\left[\frac{n-1}{n}, n\right]$ with the tags $t_i = \frac{i}{n}$ (i = 1, 2, ..., n). Use it to show that f is Riemann integrable and $\int_0^1 f(x)\,dx = 1$. 5

(c) Find the sequence of partial sums of the series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(n+1)(n+2)}$, where $x \in [0, \infty[$. Is this sequence convergent pointwise ? Is it convergent uniformly ? Justify. 5

3. (a) Check whether the sequence $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ where $a_n = \frac{6n + (-1)^n}{3n + (-1)^n}$, is convergent. 5

(b) Show that the equation $x^3 - 12x + 7 = 0$ does not have two distinct roots in the interval [–1, 1]. 5

(c) Apply Cauchy integral test to evaluate : 5

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+.....+\frac{1}{4n}\right]$$

4. (a) Let $x \in \mathbf{R}$ and $x > 0$. Show that there exists a natural number n satisfying $x > \frac{1}{n}$.

5

(b) State Cauchy's second theorem on limits. Use it to evaluate : 5

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n+3}{(n+1)!}\right]^{\frac{1}{n}}$$

(c) Show that the function f defined on **R** by :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\left(\dfrac{1}{2x}\right), & \text{when } x \neq 0 \\ 0, & \text{when } x = 0 \end{cases}$$

is derivable on **R** but f' is not continuous at $x = 0$. 5

5. (a) Find all the limit points of sets **Q** and **N**. Also find all the limit points of **Q** \ **N**. 5

(b) Show that the sequence $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ where $f_n : [0,1] \to \mathbf{R}$, $f_n(x) = \dfrac{\cos nx}{n^2}$ is uniformly convergent on its domain. 5

(c) Let f and g be two real valued functions defined on $[a, b]$ such that f is Riemann integrable and g is differentiable with $g'(x) = f(x)\ \forall x \in [a,b]$. Show that : 5

$$\int_a^b f(x)\,dx = g(b) - g(a).$$

6. (a) Prove that limit of a sequence, if it exists, exists uniquely. 5

(b) Prove that the series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, where

$$a_n = \frac{1}{3^{n-1}} + \frac{2}{(n+2)(n+3)},$$ is convergent.

Also find its sum. 5

(c) Prove the statement 'if A, B are non-empty sets such that $A \subseteq B$, then for any non-empty set C, $A \times C \subseteq B \times C$, by proving its contrapositive. 5

7. (a) Check whether or not the set : 5

$$S = \left\{ 4^{\frac{1}{n}} + 3^{1-\frac{1}{n}} : n \in \mathbf{N} \right\}$$

admits of infimum and supremum.

(b) Prove that if the series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converges then $a_n \to 0$ as $n \to \infty$. How about its converse ? Prove or disprove. 5

(c) Find the radius of convergence and the interval of convergence of the power series, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, where $a_n = \frac{n!}{n^n}$. 5

8. (a) If f be a derivable function on $[a, b]$ and k be any real number such that $f'(a) < k < f(b)$, show that there exists $c \in]a,b[$ such that $f'(c) = k$. 6

(b) Prove that every Cauchy sequence is bounded. Is its converse true ? Justify your answer. 5

(c) Give examples with justification of the following : 4

(i) A set which is both open and closed.

(ii) A set which is neither open nor closed.

BMTC–133

विज्ञान स्नातक (सामान्य)/कला स्नातक

(सामान्य)

(बी. एस-सी. जी./बी. ए. जी.)

सत्रांत परीक्षा

जून, 2026

बी.एम.टी.सी.-133 : वास्तविक विश्लेषण

समय : 3 घण्टे *अधिकतम अंक : 100*

नोट : *(i) प्रश्न सं.* ***1*** *हल करना अनिवार्य है।*

(ii) प्रश्न सं. ***2*** *से* ***8*** *तक किन्हीं* ***छः*** *प्रश्नों के उत्तर दीजिए।*

---

1. निम्नलिखित कथनों में से कौन-से कथन सत्य हैं और कौन-से असत्य ? लघु उपपत्ति या प्रति-उदाहरण, जो भी उचित हो, के साथ अपने उत्तरों के कारण बताइए। 5×2=10

   (क) कथन $(A \to B)$ का निषेधन $(A \vee \sim B)$ है।

(ख) $f(x) = |x+7|,\ x \in \mathbf{R}$ द्वारा परिभाषित फलन f का एक स्थानीय निम्निष्ठ है।

(ग) अनुक्रम $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$, जहाँ $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$, परिबद्ध है।

(घ) $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \text{ के लिए} \\ 0, & x = 0 \text{ के लिए} \end{cases}$

द्वारा परिभाषित फलन f बिंदु $x = 0$ पर संतत नहीं है।

(ङ) $f\ (x) = [x]$ द्वारा परिभाषित फलन $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ अंतराल $[2, 4]$ में समाकलनीय नहीं है।

2. (क) आगमन के सिद्धांत का उपयोग करते हुए, सिद्ध कीजिए कि :

$$3^{2n+2} - 8n - 9,\ \forall\, n \in \mathbf{N}$$

का एक गुणनखण्ड 64 है। 5

(ख) फलन $f\ (x)\ =\ 2x$ के लिए, उपअंतरालों $\left[0, \frac{1}{n}\right]$, $\left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right] \ldots\ldots \left[\frac{n-1}{n}, n\right]$ द्वारा बनाए गए, चिह्नों (टैगों) $t_i = \frac{i}{n}$ ($i\ =\ 1,\ 2,\ \ldots\ldots,\ n$) के साथ चिह्नित (टैग्ड) विभाजनों $\{P_n\}$ का रीमान योग ज्ञात कीजिए। इसका उपयोग यह दर्शाने में कीजिए कि f रीमान समाकलनीय है तथा $\int_0^1 f(x)\,dx = 1$ है। 5

(ग) श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(n+1)(n+2)}$ के आंशिक योगों का अनुक्रम ज्ञात कीजिए, जहाँ $x \in [0, \infty[$ है। क्या ये श्रेणी बिन्दुशः अभिसारी हैं ? क्या ये एकसमानतः अभिसारी हैं ? कारण बताइए। 5

3. (क) जाँच कीजिए कि क्या अनुक्रम $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ अभिसारी

है, जहाँ $a_n = \dfrac{6n + (-1)^n}{3n + (-1)^n}$ है। 5

(ख) दर्शाइए कि समीकरण $x^3 - 12x + 7 = 0$ के अंतराल

$[-1, 1]$ में दो भिन्न-भिन्न मूल नहीं हैं। 5

(ग) $\lim\limits_{n \to \infty} \left[\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots.. + \dfrac{1}{4n} \right]$ का मान

निकालने के लिए, कोशी समाकल टेस्ट का उपयोग

कीजिए। 5

4. (क) मान लीजिए कि $x \in \mathbf{R}$ और $x > 0$ है। दर्शाइए कि

एक ऐसी प्राकृत संख्या n का अस्तित्व है, जो $x > \dfrac{1}{n}$

को संतुष्ट करती है। 5

(ख) सीमाओं पर कोशी की द्वितीय प्रमेय का कथन दीजिए। इसका उपयोग $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n+3}{(n+1)!}\right]^{\frac{1}{n}}$ का मान निकालने में कीजिए। 5

(ग) दर्शाइए कि : 5

$$f(x)=\begin{cases} x^2\cos\left(\frac{1}{2x}\right), & \text{जब } x\neq 0 \\ 0, & \text{जब } x=0 \end{cases}$$

द्वारा $\mathbf{R}$ पर परिभाषित फलन f, $\mathbf{R}$ पर अवकलनीय है, परंतु $x = 0$ पर f' संतत नहीं है।

5\. (क) समुच्चयों $\mathbf{Q}$ और $\mathbf{N}$ के सभी सीमा बिंदुओं को ज्ञात कीजिए। साथ ही, $\mathbf{Q} \setminus \mathbf{N}$ के सभी सीमा बिंदुओं को भी ज्ञात कीजिए। 5

(ख) दर्शाइए कि अनुक्रम $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$, जहाँ $f_n:[0,1]\to\mathbf{R}$ है और $f_n(x)=\frac{\cos nx}{n^2}$ है, अपने प्रांत में एकसमानत: अभिसारी है। 5

(ग) मान लीजिए कि f और g दो वास्तविक मान फलन $[a, b]$ पर इस प्रकार परिभाषित हैं कि f रीमान समाकलनीय है तथा $g'(x) = f(x)\ \forall x \in [a,b]$ के साथ g अवकलनीय है। दर्शाइए कि $\int_a^b f(x)\,dx = g(b) - g(a)$ है। 5

6. (क) सिद्ध कीजिए कि एक अनुक्रम की सीमा, यदि उसका अस्तित्व है, तब उसका अस्तित्व अद्वितीय रूप से होता है। 5

(ख) सिद्ध कीजिए कि श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, जहाँ $a_n = \frac{1}{3^{n-1}} + \frac{2}{(n+2)(n+3)}$, अभिसारी है। साथ ही, इसका योग भी ज्ञात कीजिए। 5

(ग) इस कथन "यदि A और B अरिक्त समुच्चय हैं ताकि $A \subseteq B$ है, तो किसी भी अरिक्त समुच्चय C के लिए, $A \times C \subseteq B \times C$ है" को, इसके प्रतिधनात्मक को सिद्ध करने के द्वारा, सिद्ध कीजिए। 5

7. (क) जाँच कीजिए कि क्या समुच्चय : 5

$$S = \left\{ 4^{\frac{1}{n}} + 3^{1-\frac{1}{n}} : n \in \mathbf{N} \right\}$$

निम्नक और उच्चक ग्रहण करता है या नहीं।

(ख) सिद्ध कीजिए कि यदि श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ अभिसारी है, तो $n \to \infty$ होने पर $a_n \to 0$ होता है। इसके विलोम के बारे में आप क्या कह सकते हैं ? उसे सिद्ध या असिद्ध कीजिए। 5

(ग) घात श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, की अभिसरण-त्रिज्या तथा उसका अभिसरण-अंतराल ज्ञात कीजिए, जहाँ $a_n = \frac{n!}{n^n}$ है। 5

8. (क) यदि $[a, b]$ पर f पर अवकलनीय फलन है तथा k कोई वास्तविक संख्या है ताकि $f'(a) < k < f(b)$ है, तो दर्शाइए कि $c \in]a, b[$ का अस्तित्व है ताकि $f'(c) = k$ है। 6

(ख) सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक कोशी अनुक्रम परिबद्ध होता है। क्या इसका विलोम सत्य है ? अपने उत्तर की कारण देकर पुष्टि कीजिए। 5

(ग) निम्नलिखित की पुष्टि करते हुए, उदाहरण दीजिए : 4

(i) एक समुच्चय जो विवृत और संवृत दोनों है।

(ii) एक समुच्चय जो न तो विवृत है और न ही संवृत है।

× × × × ×