No. of Printed Pages : 16 **BMTC–134**

BACHELOR OF SCIENCE (GENERAL)/ BACHELOR OF ARTS (GENERAL)/BACHELOR OF SCIENCE (MATHEMATICS) (BSCG/BAG/BSCFMT)

Term-End Examination

June, 2026

BMTC-134 : ALGEBRA

Time : 3 Hours *Maximum Marks : 100*

Note : *(i) There are eight questions in this paper.*

(ii) Question No. 8 is compulsory.

*(iii) Do any **six** questions from Question Nos. 1 to 7.*

(iv) Use of calculator is not allowed.

(v) Show your rough work below or right side of the page.

---

1. (a) Does there exist a non-trivial group $G \neq \{e\}$ such that $x^2 = x$, for every $x \in G$. Give reasons for your answer. Is your answer true for semi-groups with identity element. Justify your answer. 3

(b) Let $X = \{\overline{5}, \overline{15}, \overline{25}, \overline{35}\}$. Form the Cayley table of X with respect to multiplication modulo 40. Check whether X is a group with respect to multiplication modulo 40. 6

(c) Prove that the only ideals of a field F are (0) and F itself. 3

(d) Prove that a subgroup H of a group G of index 2 is normal in G. 3

2. (a) Define a map $f : GL_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*$ by $f(A) = \det(A), \forall A \in GL_2(\mathbf{R})$.

Is f a homomorphism of groups ? If yes, find Ker(f) and Im(f). Is $GL_2(\mathbb{R})/\text{Ker}(f)$ of finite order ? Justify your answer. Also, find the elements in $GL_2(\mathbb{R})$ $SL_2(\mathbb{R})$ of finite order. 6

(b) Let $\sigma \in S_5$ be the permutation

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Write σ as a product of transposition and as a product of disjoint cycles. Find the order of σ. 4

(c) Let R be a ring. Then prove that for all $a, b, c \in R$, 5

(i) $a \,.\, 0 = 0 \cdot a = 0$

(ii) $a \,.\, (-b) = (-a) \,.\, b = -a \,.\, b$

3. (a) For a non-empty set X, let P(X) denote the set of all subsets of X. Prove that $[\mathbf{P}(X), \Delta, \cap)$ is a commutative ring with identity, where $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, $\forall A, B \in \mathbf{P}(X)$. 6

(b) Let G be a group and let H and K be subgroups of G such that $\theta(H) = 15$ and $\theta(K) = 28$. Find $H \cap K$. 3

(c) Let $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 10b & a \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbb{Z} \right\}$. Then prove that :

(i) S is a sub-ring of $M_2(\mathbb{Z})$

(ii) S is isomorphic to $\mathbb{Z}[\sqrt{10}]$. 6

4. (a) Prove that the ideal $< x, 2 >$ of $\mathbb{Z}[x]$ is not a principal ideal in $\mathbb{Z}[x]$. 7

(b) Find t and $s \in \mathbb{Z}$ such that :

$$(t) \cdot 147 + (s) \cdot 56 = (147, 56).$$ 5

(c) Calculate the following : 3

(i) $\left(\overline{2}x^2+\overline{2}x+\overline{1}\right)+\left(\overline{7}x^3+\overline{3}x^2+\overline{2}\right)$ in $\mathbb{Z}_5[x]$

(ii) $\left(\overline{3}x^2+x-\overline{2}\right)\cdot\left(\overline{2}x^3+\overline{5}x+\overline{7}\right)$ in $\mathbb{Z}_{11}[x]$

5. (a) If $\alpha \in \mathbf{Q}$ is a root of a monic polynomial $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$, show that α must be in $\mathbb{Z}$. 4

(b) If R is an integral domain of characteristic p, p a prime, prove that $(a+b)^{p^n} = a^{p^n} + b^{p^n}, \forall a, b \in \text{R}$, and $n \in \mathbb{N}$. 5

(c) Let N be the nil radical of a ring R. Show that R/N has no non-zero nilpotent element. 3

(d) Let $S^1 = \{Z \in \mathbb{C}^* \mid |Z| = 1\}$ and

$U_n = \{Z \in \mathbb{C}^* \mid Z^n = 1\}$ for $n \in \mathbb{N}$.

Check that $U_n \subseteq S^1$. Further show that $U_n \leq S^1$. 3

6. (a) Find the order of each of the elements in U(15). Is U(15) cyclic ? Justify your answer. 5

(b) If G is a group such that G/Z(G) is cyclic, then show that G is abelian. Hence, deduce that if G is a non-abelian group of order pq, where p and q are distinct primes then $Z(G) = \{e\}$. 6

(c) Let $R = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \middle| a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$. Check whether R is a subring of $M_2(\mathbb{R})$. Is R an ideal of $M_2(\mathbb{R})$. Justify your answer. 4

7. (a) Find all epimorphisms from the group $\mathbb{Z}_{11}$ onto $\mathbb{Z}_8$. 4

(b) Prove that the set of A_n of all even permutations in S_n form a normal subgroup of S_n. Further show that $\theta(A_n) = \frac{n!}{2}$. 5

(c) Let S be the set of all polynomials and $\mathbb{R}$ with zero constant term. Prove that S is an ideal of $\mathbb{R}[x]$. Also check whether or not S is a maximal ideal of $\mathbb{R}[x]$. 6

8. Which of the following statements are true and which are false ? Justify your answer with a short proof or a counter-example, whichever is appropriate. 10

(i) The units U(F) of a field F is a F itself.

(ii) There exists an infinite abelian group which is simple.

(iii) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ is a field of 6 elements.

(iv) Every commutative binary operation on a set S is associative.

(v) Any prime ideal of the ring $\mathbb{Z}$ of integers is a maximal ideal.

BMTC–134

विज्ञान स्नातक (सामान्य) / कला स्नातक (सामान्य), विज्ञान स्नातक (गणित)

(बी.एस.-सी.जी./बी.ए.जी./ बी.एस.-सी.एफ.एम.टी.)

सत्रांत परीक्षा

जून, 2026

बी.एम.टी.सी.-134 : बीजगणित

समय : 3 घण्टे *अधिकतम अंक : 100*

नोट : *(i) इस प्रश्न-पत्र में 8 प्रश्न हैं।*

(ii) प्रश्न संख्या 8 हल करना अनिवार्य है।

(iii) प्रश्न संख्या 1 से 7 तक से कोई भी ***छः*** *प्रश्न कीजिए।*

(iv) अपना रफ कार्य पृष्ठ के नीचे या दायीं ओर दिखाइए।

(v) कैल्कुलेटर प्रयोग करने की अनुमति नहीं है।

---

1. (क) क्या एक अतुच्छ समूह $G \neq \{e\}$ का अस्तित्व है, जिसमें प्रत्येक $x \in G$ के लिए $x^2 = x$? अपने उत्तर का कारण बताइए। क्या आपका उत्तर तत्समकी सामि समूह के लिए सत्य है ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। 3

(ख) मान लीजिए $X = \{\overline{5}, \overline{15}, \overline{25}, \overline{35}\}$. मॉड्युलो 40 गुणन के सापेक्ष X की कैली तालिका बनाइए। जाँच कीजिए कि X मॉड्युलो 40 गुणन के सापेक्ष समूह है। 6

(ग) दिखाइए कि एक क्षेत्र F की गुणजावली या केवल (0) और F हैं। 3

(घ) दिखाइए कि एक समूह G का सूचकांक 2 वाला उपसमूह H प्रसामान्य है। 3

2. (क) फलन $f : GL_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*$ सभी $A \in GL_2(\mathbf{R})$ $f(A) = \det(A)$ को परिभाषित कीजिए। क्या f समूहों का समाकारिता है ? यदि हाँ, तो $\text{Ker}(f)$ और

I$m(f)$ निकालिए। क्या $GL_2(\mathbb{R})/Ker(f)$ परिमित कोटि का है ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। $GL_2(\mathbb{R})/Ker(f)$ की परिमित कोटि वाले अवयव निकालिए। 6

(ख) मान लीजिए क्रमचय $\sigma \in S_5$,

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ क्रमचय σ को पक्षान्तरणों के गुणनफल रूप में और असंयुक्त चक्रों के गुणनफल के रूप में लिखिए। σ की कोटि ज्ञात कीजिए। 4

(ग) मान लीजिए R एक वलय है। सिद्ध कीजिए कि सभी $a, b, c \in R$ के लिए :

(i) $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$

(ii) $a \cdot (-b) = (-a) \cdot b = -a \cdot b$ 5

3. (क) मान लीजिए कि एक अरिक्त समुच्चय X के लिए P(X), X के सभी उपसमुच्चयों के समुच्चय को निरूपित करता है। दिखाइए कि $(\mathbf{P}(x), \Delta, \cap)$ एक क्रमचय तत्समकी वलय है, जहाँ $A\Delta B = (A\setminus B) \cup (B\setminus A), \forall A, B \in P(X)$. 6

(ख) मान लीजिए कि G एक समूह है और H और K ऐसे उपसमूह हैं जिनके लिए $\theta(H) = 15$ और $\theta(K) = 28$ हैं। $H \cap K$ निकालिए। 3

(ग) मान लीजिए कि $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 10b & a \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{Z} \right\}$.

सिद्ध कीजिए कि :

(i) S वलय $M_2(\mathbb{Z})$ की उपवलय है।

(ii) S वलय $\mathbb{Z}\left[\sqrt{10}\right]$ की तुल्यकारिता है। 6

4. (क) सिद्ध कीजिए कि वलय $\mathbb{Z}[x]$ की गुणजावली $< x, 2 >$ मुख्य गुणजावली नहीं है। 7

(ख) ऐसे $t, s \in \mathbb{Z}$ ज्ञात कीजिए जिनके लिए $(t).147 + (s).56 = (147, 36)$. 5

(ग) निम्नलिखित परिकलित कीजिए : 3

(i) $\mathbb{Z}_5[x]$ में

$$\left(\overline{2}x^2+\overline{2}x+1\right)+\left(\overline{7}x^3+\overline{3}x^2+2\right)\cdot$$

(ii) $\mathbb{Z}_{11}[x]$ में

$$\left(\overline{3}x^2+x-\overline{2}\right)\cdot\left(\overline{2}x^3+\overline{5}x+\overline{7}\right).$$

5\. (क) यदि $\alpha \in \mathrm{Q}$ एक गुणांकी पद $p(x) \in \mathbb{Z}$ का मूल है, तो दिखाइए कि α, $\mathbb{Z}$ में होना चाहिए। 4

(ख) यदि R एक अभिलाक्षणिक p वाली वलय है, जहाँ p अभाज्य संख्या है, तो सिद्ध कीजिए कि

$$(a+b)^{p^n}=a^{p^n}+b^{p^n}, \forall a,b \in \mathrm{R}, n \in \mathbb{N}.$$

5

(ग) मान लीजिए कि N वलय, R की शून्य करणी है। दिखाइए कि R/N में कोई भी शून्यभावी अवयव नहीं है। 3

(घ) मान लीजिए, $n \in \mathbb{N}$ के लिए $S^1 = \{Z \in \mathbb{C}^* \mid |Z| = 1\}$ और $U_n = \{Z \in \mathbb{C}^* \mid Z^n = 1\}$. जाँच कीजिए कि $U_n \subseteq S^1$. आगे, दिखाइए कि $U_n \leq S^1$. 3

6. (क) समूह U(15) में प्रत्येक अवयव की कोटि निकालिए। क्या U(15) चक्रीय है ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। 5

(ख) यदि G ऐसा समूह है जिसके लिए G/Z(G) चक्रीय है, तो दिखाइए कि G आबेली है। इससे यह निष्कर्ष निकालिए कि यदि G एक कोटि pq वाला समूह है, जहाँ p और q अभाज्य संख्याएँ हैं, तो $Z(G) = \{e\}$. 6

(ग) मान लीजिए $R = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \middle| a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$. जाँच कीजिए कि R वलय $M_2(\mathbb{R})$ की उपवलय है। क्या R वलय $M_2(\mathbb{R})$ की गुणजावली है ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। 4

7. (क) $\mathbb{Z}_{11}$ से $\mathbb{Z}_8$ तक सभी आच्छादक समाकारिता निकालिए। 4

(ख) दिखाइए कि A_n, जो S_n के सभी सम क्रमचय का समुच्चय है, S_n की प्रसामान्य उपसमूह है। आगे दिखाइए कि $\theta(A_n) = \frac{n!}{2}$. 5

(ग) मान लीजिए कि S शून्य अचर गुणांक वाला वास्तविक बहुपदों का समुच्चय है। सिद्ध कीजिए कि S वलय $\mathbb{R}[x]$ की गुणजावली है। यह भी जाँच कीजिए कि S एक उच्छिष्ट गुणजावली है या नहीं। 6

8. निम्नलिखित कथनों में से कौनसे कथन सत्य और कौनसे कथन असत्य हैं ? अपने उत्तर को एक लघु उपपत्ति या प्रति उदाहरण के रूप में दीजिए जो भी उचित हो। उचित पुष्टिकरण के साथ ही अंक दिए जाएँगे। 10

(i) एक क्षेत्र F का मात्रक U(F) क्षेत्र F है।

(ii) एक अनन्त आबेली समूह का अस्तित्व है, जो सरल है।

(iii) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ एक छः अवयव वाला क्षेत्र है।

(iv) एक समुच्चय S पर कोई भी क्रमविनिमेय द्वि–आधारी संक्रिया साहचर्य है।

(v) पूर्णांक संख्याओं की वलय $\mathbb{Z}$ की कोई भी अभाज्य गुणजावली उच्चिष्ठ है।

× × × × ×