No. of Printed Pages : 23 **BMTE–141**

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME

(BSCG/BAG)

Term-End Examination

June, 2026

BMTE-141 : LINEAR ALGEBRA

Time : 3 Hours *Maximum Marks : 100*

Note : *(i) There are eight questions in this paper.*

*(ii) The **eighth** question is compulsory.*

*(iii) Do any **six** questions from question no. **1** to question no. **7**.*

(iv) Use of calculator is not allowed.

(v) Do your rough work in a clearly identifiable part of the bottom of the same page or in the right side of the page only.

---

1. (a) Write the formula for angle between two vectors in $\mathbf{R}^3$. Find the angle between the vectors $2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ and $(1-\sqrt{3})\mathbf{j}+(1+\sqrt{3})\mathbf{k}$ 3

(b) Use row reduction to check whether the vectors (1, 1, – 1), (1, 2, 1) and (2, 1, 3) are linearly independent. 3

(c) Determine the equation of the plane corresponding to the vector space spanned by the vectors (1, 0, 1) and (– 1, 1, 1). 3

(d) Find the minimal polynomial of the matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. 3

(e) If the matrix of a linear transformation $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ with respect to the basis $\left\{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right\}$ is $\begin{bmatrix}1 & 1\\2 & 1\end{bmatrix}$ find T. 3

2. (a) Verify that $\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}$ is an eigenvector for the matrix $\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\2 & 0 & 2\\1 & 0 & 1\end{bmatrix}$. What is the corresponding eigenvalue ? 2

(b) Define the rank and signature of a real quadratic form. Find the rank and signature of the quadratic form $x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - x_4^2$ in four variables. 4

(c) Check whether the following matrix is in reduced echelon form :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Justify your answer. Is it in Row Reduced echelon form ? If it is not in row reduced echelon form reduce it to row reduced echelon form. 4

(d) Check whether the following system of equations can be solved by Cramer's rule :

$$x_1 - x_2 + x_3 = 2$$

$$x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 1$$

$$2x_1 - x_2 - x_3 = 3$$

If 'Yes', then solve the equations using Cramer's rule. If 'No', then solve the system of equations using Gaussian Elimination. 5

3. (a) Check whether the matrix

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

is diagonalizable. If it is diagonalizable, find an invertible matrix P such that $P^{-1}AP$ is diagonal. If A is not diagonalizable, then find the adjugate of A. 5

(b) Show that :

(i) The diagonal entries of a Hermitian matrix are real numbers.

(ii) The real parts of the entries of the diagonal entries of skew Hermitian matrix are zero. 4

(c) Find the orthogonal canonical form of the quadratic form

$$-x^2 + y^2 + z^2 - 4xy - 4xz$$

and the principal axes. 6

4. (a) Find the inverse of $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

using Cayley-Hamilton theorem. 5

(b) Find the values of $a, b \in \mathbf{C}$ for which the matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & i & 1+i \\ a & b+i & 2-i \\ 1-i & 2+i & 1 \end{bmatrix}$$

is Hermitian. 2

(c) Complete the set $\{(1, 0, 1)\}$ to a basis of $\mathbf{R}^3$. 3

(d) State the Cauchy-Schwarz inequality for inner product space. Verify the inequality for the vectors $(i, 0, 1)$ and $(1, 0, -i)$. 2

(e) Define the coset of a vector space. If $W = \{(x, y) \mid x - 4y = 0\}$ is a subspace of $\mathbf{R}^2$ describe the coset $(0, 2) + W$. 3

5. (a) Let the linear transformation $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ be defined by $T((x_1, x_2, x_3)) = (x_1 + x_2 - x_3, 2x_1 + x_2 + x_3, x_1 + 2x_2 - 4x_3)$. Find bases for R(T) and Ker (T). 8

(b) Obtain an orthonormal basis for $\mathbf{C}^3$ by applying Gram-Schmidt orthogonalisation process to $\{(i, 0, -i), (0, i, i), (i, i, i)\}$. 7

6. (a) Let

$$V_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ d & 0 & e \end{bmatrix} \middle| a, b, c, d, e \in \mathbf{R} \right\}$$

and $$V_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & x & 0 \\ y & 0 & z \\ 0 & w & 0 \end{bmatrix} \middle| x, y, z, w \in \mathbf{R} \right\}$$

be subsets of M_3 ($\mathbf{R}$). Show that V_1 and V_2 are subspaces of M_3 ($\mathbf{R}$). Also, check whether $M_3(\mathbf{R}) = V_1 \oplus V_2$. 6

(b) Let

$$V_1 = \left[\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \right],$$

$$V_2 = \left[\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\} \right]$$

be subspaces of $\mathbf{R}^4$. Find a basis for $V_1 + V_2$. Also, find a spanning set for $V_1 \cap V_2$. 9

7. (a) Let $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ be defined by $T(x, y) = (x, 2x + y, y)$ and $S : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ be defined $S(x, y) = (x - y, y - z)$. Suppose that B_1 and B_2 are the standard bases of $\mathbf{R}^2$ and $\mathbf{R}^3$ respectively. Check that

$$[T \circ S]_{B_2}^{B_2} = [T]_{B_2}^{B_1} \circ [S]_{B_1}^{B_2}.$$ 8

(b) Let A be a 4 × 5 matrix. Write down the elementary matrices with which, when we multiply A on the left, will perform the following row operations on A :

(i) $R_1 \leftrightarrow R_4$

(ii) $R_2 \to R_2 + 2R_3$ 2

(c) If (V, < , >) is an inner product space over **C** and T is a self-adjoint operator on V, prove that the eigenvalues of T are real. 3

(d) Check whether $x^3 + x$ is in the linear span of $\{x^3 + x^2 + 1, 2x^2 + x\}$. 2

8. Which of the following statements are true and which are false ? Justify your answer with short proof or a counter example. Marks are to be given only for proper justification.

(a) If A and B are upper triangular matrices, then $(AB)^t = A^t B^t$. 2

(b) If A and B are two matrices with the same Row Reduced Echelon form, then A = B. 2

(c) The projection operator $pr_1 : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ is surjective. 2

(d) If $A \in M_n(\mathbf{R})$ is diagonalizable, then A is a symmetric matrix. 2

(e) The function $\bullet$:

$$\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R} : \bullet\,((x_1, y_1), (x_2, y_2))$$

$$= x_1x_2 - 2y_1y_2$$

is an inner product on $\mathbf{R}^2$. 2

BMTE–141

स्नातक उपाधि कार्यक्रम

(बी. एस.-सी. जी./बी. ए. जी)

सत्रांत परीक्षा

जून, 2026

बी.एम.टी.ई.-141 : रैखिक बीजगणित

समय : 3 घण्टे अधिकतम अंक : 100

नोट : *(i) इस प्रश्न पत्र में आठ प्रश्न हैं।*

(ii) ***आठवाँ*** *प्रश्न करना अनिवार्य है।*

(iii) प्रश्न संख्या ***1*** *से* ***7*** *तक कोई भी* **छः** *प्रश्न कीजिए।*

(iv) केल्कुलेटरों के प्रयोग की अनुमति नहीं है।

(v) अपने रफ कार्य पृष्ठ के नीचे या दायीं ओर दिखाइए।

---

1. (क) $\mathbf{R}^3$ में दो सदिशों के बीच के कोण के लिए सूत्र लिखिए। सदिशों $2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ और $(1-\sqrt{3})\mathbf{j}+(1+\sqrt{3})\mathbf{k}$ के बीच का कोण निकालिए। 3

(ख) पंक्ति समानयन द्वारा जाँच कीजिए कि सदिश (1, 1, – 1), (1, 2, 1) और (2, 1, 3) रैखिकतः स्वतन्त्र हैं या नहीं। 3

(ग) सदिशों (1, 0, 1) और (– 1, 1, 1) से विस्तृत सदिश समष्टि के संगत समतल का समीकरण निर्धारित कीजिए। 3

(घ) आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ का अल्पिष्ट बहुपद ज्ञात कीजिए। 3

(ङ) यदि आधार $\left\{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right\}$ के सापेक्ष एक रैखिक रूपान्तरण $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ का आव्यूह $\begin{bmatrix}1 & 1\\2 & 1\end{bmatrix}$ है, तो T निकालिए। 3

2. (क) सत्यापित कीजिए कि $\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}$ आव्यूह $\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\2 & 0 & 2\\1 & 0 & 1\end{bmatrix}$ का एक आइगेन सदिश है। संगत आइगेमान क्या है ? 2

(ख) एक वास्तविक द्विघाती समघात की जाति और चिह्नक परिभाषित कीजिए। चार चर वाले द्विघाती समघात $x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - x_4^2$ की जाति और चिह्नक ज्ञात कीजिए। 4

(ग) जाँच कीजिए कि निम्नलिखित आव्यूह समानीत सोपानक रूप में है या नहीं :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। क्या यह पंक्ति समानीत सोपानक रूप में है ? यदि नहीं है तो इसको पंक्ति समानीत सोपानक रूप में समानीत कीजिए। 4

(घ) जाँच कीजिए कि निम्नलिखित समीकरण निकाय क्रेमर नियम से हल किया जा सकता है या नहीं :

$$x_1 - x_2 + x_3 = 2$$

$$x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 1$$

$$2x_1 - x_2 - x_3 = 3$$

यदि 'हाँ' तो क्रेमर नियम से हल कीजिए। यदि 'नहीं' तो समीकरण निकाय को गाऊसीय निराकरण से हल कीजिए। 5

3. (क) जाँच कीजिए कि आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ विकर्णनीय है या नहीं। यदि विकर्णनीय है तो एक व्युत्क्रमणीय आव्यूह P निकालिए जिसके लिए $P^{-1}AP$ विकर्ण आव्यूह है। यदि A विकर्णनीय नहीं है तो A का सहखण्डज (adjugate) ज्ञात कीजिए। 5

(ख) दिखाइए कि :

(i) एक हर्मिटी आव्यूह की विकर्णीय प्रविष्टियाँ वास्तविक संख्याएँ होती हैं।

(ii) एक विषम हर्मिटी आव्यूह की विकर्णीय प्रविष्टियों के वास्तविक भाग शून्य हैं। 4

(ग) द्विघाती समघात $-x^2 + y^2 + z^2 - 4xy - 4xz$ का लांबिक विहित समघात और मुख्य अक्ष निकालिए। 6

4. (क) कैली–हैमिल्टन प्रमेय का प्रयोग करके आव्यूह

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

का व्युत्क्रम निकालिए। 5

(ख) $a, b \in \mathbf{C}$ के वे मान निकालिए जिनके लिए आव्यूह

$$\begin{bmatrix} 1 & i & 1+i \\ a & b+i & 2-i \\ 1-i & 2+i & 1 \end{bmatrix}$$ हर्मिटी है। 2

(ग) समुच्चय $\{(1, 0, 1)\}$ को $\mathbf{R}^3$ के एक आधार के रूप में पूर्ण कीजिए। 3

(घ) आंतर गुणन समष्टियों के लिए कॉशी–श्वार्ज़ असमिका बताइए। असमिका को सदिशों $(i, 0, 1)$ और $(1, 0, -i)$ के लिए सत्यापित कीजिए। 2

(ङ) एक सदिश समष्टि का सहसमुच्चय परिभाषित कीजिए। यदि $W = \{(x, y) \mid x - 4y = 0\}$, $\mathbf{R}^2$ की एक उपसमष्टि है तो सहसमुच्चय $(0, 2) + W$ का वर्णन कीजिए। 3

5. (क) मान लीजिए कि रैखिक रूपान्तरण $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ निम्न प्रकार परिभाषित है :

$T((x_1, x_2, x_3)) = (x_1 + x_2 - x_3, 2x_1 + x_2 + x_3, x_1 + 2x_2 - 4x_3)$ R(T) और Ker (T) के आधार निकालिए। 8

(ख) ग्राम–श्मिट लांबीकरण प्रक्रिया को $\{(i, 0, -i), (0, i, i), (i, i, i)\}$ पर प्रयोग करके $\mathbf{C}^3$ का प्रसामान्य लांबिक आधार निकालिए। 7

6. (क) मान लीजिए :

$$V_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ d & 0 & e \end{bmatrix} \middle| a, b, c, d, e \in \mathbf{R} \right\}$$

और $$V_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & x & 0 \\ y & 0 & z \\ 0 & w & 0 \end{bmatrix} \middle| x, y, z\, w \in \mathbf{R} \right\}$$

सदिश समष्टि $M_3(\mathbf{R})$ के उपसमुच्चय हैं। दिखाइए कि V_1 और V_2 सदिश समष्टि $M_3(\mathbf{R})$ की उपसमष्टियाँ हैं। यह भी जाँच कीजिए कि $M_3(\mathbf{R}) = V_1 \oplus V_2$ है। 6

(ख) मान लीजिए कि :

$$V_1 = \left[\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}\right],$$

$$V_2 = \left[\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right\}\right]$$

$\mathbf{R}^4$ की उपसमष्टियाँ हैं। $V_1 + V_2$ के लिए एक आधार निकालिए। $V_1 \cap V_2$ के लिए एक जनक समुच्चय भी निकालिए। 9

7. (क) मान लीजिए कि

$$T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3, T(x, y) = (x, 2x + y, y)$$

द्वारा परिभाषित है और

$$S : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2 \; S(x, y) = (x - y, y - z)$$

द्वारा परिभाषित है। मान लीजिए B_1 और B_2, क्रमशः $\mathbf{R}^2$ और $\mathbf{R}^3$ के लिए मानक आधार हैं।

जाँच कीजिए कि $[T \circ S]_{B_2}^{B_2} = [T]_{B_2}^{B_1} \circ [S]_{B_1}^{B_2}$.

है। 8

(ख) मान लीजिए A एक 4×5 आव्यूह है। वह प्रारम्भिक आव्यूह लिखिए जिससे A को बांईं तरफ से गुणन करने पर आव्यूह A पर निम्नलिखित पंक्ति संक्रियाएँ होंगी :

(i) $R_1 \leftrightarrow R_4$

(ii) $R_2 \rightarrow R_2 + 2R_3$ 2

(ग) यदि (V, < , >), **C** पर एक आंतर गुणन समष्टि है और T सदिश समष्टि V पर एक स्वसंलग्न संक्रिया है, तो सिद्ध कीजिए कि T के आइगेमान वास्तविक हैं। 3

(घ) जाँच कीजिए कि $x^3 + x$ समुच्चय $\{x^3 + x^2 + 1, 2x^2 + x\}$ की रैखिक विस्तृति में है। 2

8. निम्नलिखित कथनों में से कौन–से कथन सत्य और कौन–से कथन असत्य हैं ? अपने उत्तर को एक लघु उपपत्ति या प्रति–उदाहरण, के रूप में दीजिए, जो भी उचित हो। उचित पुष्टिकरण के साथ ही अंक दिए जाएँगे।

(क) यदि A और B उपरि त्रिभुजीय आव्यूह हैं तो $(AB)^t = A^t B^t$. 2

(ख) यदि A और B समान पंक्ति समानीत सोपानक रूप वाले आव्यूह हैं, तो A = B होगा। 2

(ग) प्रक्षेप संकारक $\text{pr}_1 : \mathbf{R}_2 \to \mathbf{R}$ आच्छादक है। 2

(घ) यदि $A \in M_n(\mathbf{R})$ विकर्णनीय है तो A सममित है। 2

(ङ) फलन • :

$$\mathrm{R}^2 \to \mathbf{R}^2 : \mathbf{R} : \bullet\ ((x_1, y_1), (x_2, y_2))$$

$$= x_1x_2 - 2y_1y_2,$$

$\mathbf{R}^2$ पर एक आंतर गुणनफल है। 2

× × × × ×