No. of Printed Pages : 12 **MTE–002**

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)

Term-End Examination

June, 2026

MTE-002 : LINEAR ALGEBRA

Time : 2 Hours *Maximum Marks : 50*

Note : *Question No.* ***7*** *is compulsory. Do any* ***four*** *questions from Q. Nos.* ***1*** *to* ***6****. Use of calculator is not allowed.*

1. (a) Check whether (3, 2, 1) is in the linear span of S = {(2, 0, 1), (1, 2, 3)} or not. 2

   (b) Let T be a linear operator on $\mathbf{R}^3$, defined by :

   $$T(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_2 + x_3, x_1 - x_2, 3x_1)$$

   Find the kernel and range of T. Is T invertible ? Give reasons for your answer. 3

(c) Show that the matrix $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ is diagonalizable. Further, find P such that $P^{-1}AP$ is a diagonal matrix. 5

2. (a) Find the dual basis of the basis $B = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ of $\mathbf{R}^3$. 3

(b) Find the values of k for which the following system of linear equations can be solved by Cramer's rule : 5

$$5x + 3y + 2z = 10$$

$$x + kz = 6$$

$$7x + 3y + 5z = 15$$

Is there a solution for $k = 5$? If yes, find it using Cramer's rule. If not, use the Gaussian elimination method for obtaining a solution.

(c) Check whether or not : 2

$$W = \{(a+1,\ a) | a \in \mathbf{R}^2\}$$

is a subspace of $\mathbf{R}^2$.

3. (a) Find A^{-1}, where : 3

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

by using the Cayley-Hamilton theorem.

3

(b) Obtain the orthogonal canonical reduction and the principal axes of the quadratic form : 7

$$Q(x) = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$$

4. (a) Find an orthonormal basis of $\mathbf{R}^3$ containing $\left(\frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5}\right)$. 3

(b) If θ is the angle between the vectors (3, 4) and (– 1, 0) and ϕ is the angle between (2, 1) and (0, 1), then show that $\theta = 2\phi$. 4

(c) If $\alpha \in C$ is an eigenvalue of a skew-Hermitian operator, find the values of α. 3

5. (a) Find the inverse of the matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ by the row reduction method. 4

(b) Show that the set $\{(i, 1, 0), (2, 1, i), (0, 1 + i, -1)\}$ is basis of C^3. Find the coordinates of (1, 1, 1) in this basis. 6

6. (a) Let $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ be a linear transformation defined by :

$$T(x, y, z) = (x - y, x + y, y)$$

Find the matrix of T with respect to the ordered basis B = {(0, 1), (1, 1)} and $B' = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$ of $\mathbf{R}^2$ and $\mathbf{R}^3$, respectively. 4

(b) Find the vector equation of the plane passing through the points (1, 1, 1), (– 2, 0, 1) and (1, – 1, 1). 2

(c) Let : $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ be the linear operator defined by :

$$T(x, y, z) =$$

$$(4x + 7y + 5z, -2x - 4y - 4z, x + 3y + 4z).$$

Find the minimal polynomial of T. 4

7. Which of the following statements are true and which are false ? Justify your answers with a short proof or counter example, whichever is appropriate. Marks will be awarded only for correct justification : 10

(i) If $T : V \to W$ is a linear transformation, where V and W are finite-dimensional vector spaces and rank(T) = dim(W), then T is invertible.

(ii) Eigenvalues of a unitary operator are of the form $e^{i\theta}$, $\theta \in \mathbf{R}$.

(iii) If W_1 and W_2 are subspaces of $\mathbf{R}^3$ such that $\dim(W_1) = 1$ and $\dim(W_2) = 2$, then $\mathbf{R}^3 = W_1 \oplus W_2$.

(iv) If D is the differentiation operator on the space of all polynomials of degree at most 3, then $D^4 = \mathbf{0}$.

(v) If two matrices in $\mathbf{M}_n(\mathbf{R})$ satisfy the same monic polynomial of degree n with real coefficients, then they have the same minimal polynomial.

MTE–002

स्नातक उपाधि कार्यक्रम

(बी. डी. पी.)

सत्रांत परीक्षा

जून, 2026

एम.टी.ई.-002 : रैखिक बीजगणित

समय : 2 घण्टे अधिकतम अंक : 50

नोट : *इस प्रश्न-पत्र में सात प्रश्न हैं। प्रश्न संख्या **7** अनिवार्य है। प्रश्न संख्या **1** से **6** तक कोई **चार** प्रश्न कीजिए। कैल्कुलेटर का प्रयोग नहीं करना है।*

---

1. (क) जाँच कीजिए कि $(3, 2, 1)$ समुच्चय $S = \{(2, 0, 1), (1, 2, 3)\}$ की रैखिक विस्तृति में है या नहीं। 2

(ख) मान लीजिए कि T, $\mathbf{R}^3$ पर :

$$T(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_2 + x_3, x_1 - x_2, 3x_1)$$

द्वारा परिभाषित है। T का अष्टि और परिसर ज्ञात कीजिए। क्या T व्युत्क्रमणीय है ? अपने उत्तर का कारण बताइए। 3

(ग) दिखाइए कि आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ विकर्णनीय है। आगे आव्यूह P ज्ञात कीजिए जिसके लिए $P^{-1}AP$ विकर्ण आव्यूह है। 5

2. (क) $\mathbf{R}^3$ का आधार :

$$B = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$$

का द्वैत आधार निकालिए। 3

(ख) अचर k के मान ज्ञात कीजिए जिनके लिए निम्नलिखित समीकरण निकाय को क्रेमर नियम से हल किया जा सकता है :

$$5x + 3y + 2z = 10$$
$$x + kz = 6$$
$$7x + 3y + 5z = 15$$

क्या $k = 5$ के लिए हल है ? यदि 'हाँ' तो क्रेमर नियम से हल ज्ञात कीजिए। यदि 'न' तो गौसीय निराकरण प्रयोग करके हल निकालिए। 5

(ग) जाँच कीजिए कि $W = \{(a+1, a) | a \in \mathbf{R}^2\}$ $\mathbf{R}^2$ का उपसमुच्चय है या नहीं। 2

3. (क) आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ के लिए केलि-हेमिल्टन प्रमेय को प्रयोग करके A^{-1} ज्ञात कीजिए। 3

(ख) द्विघात समघात :

$$Q(x) = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$$

का लाम्बिक विहित समानयन और मुख्य अक्ष ज्ञात कीजिए। 7

4. (क) $\mathbf{R}^3$ का सदिश $\left(\frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5}\right)$ को आविष्ट करने वाला एक प्रसामान्य लाम्बिक आधार निकालिए। 3

(ख) यदि सदिशें $(3, 4)$ और $(-1, 0)$ के बीच के कोण θ है और सदिशें $(2, 1)$ और $(0, 1)$ के बीच के कोण ϕ है तो दिखाइए कि $\theta = 2\phi$ । 4

(ग) यदि $\alpha \in C$ एक विषम सममित आव्यूह की आइगेमान है तो α के मानों को ज्ञात कीजिए। 3

5. (क) पंक्ति समानयन द्वारा आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ का व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए। 4

(ख) दिखाइए कि समुच्चय :

$$S = \{(i, 1, 0), (2, 1, i), (0, 1 + i, -1)\}$$

$\mathbf{C}^3$ का आधार है। इस आधार के सापेक्ष सदिश $(1, 1, 1)$ का निर्देशांक निकालिए। 6

6. (क) मान लीजिए कि $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$:

$$T(x, y, z) = (x - y, x + y, y)$$

द्वारा परिभाषित एक रैखिक रूपान्तरण है। $\mathbf{R}^2$ की क्रमित आधार $B = \{(0, 1), (1, 1)\}$ और $\mathbf{R}^3$ की क्रमित आधार $B' = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$ के सापेक्ष T की आव्यूह ज्ञात कीजिए। 4

(ख) बिन्दुओं (1, 1, 1), (– 2, 0, 1) और (1, – 1, 1) से गुजरने वाले समतल का समीकरण निकालिए। 2

(ग) मान लीजिए कि $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$:

$$T(x, y, z) = (4x + 7y + 5z, -2x - 4y - 4z, x + 3y + 4z)$$

द्वारा परिभाषित रैखिक संकारक है। T का अल्पिष्ट बहुपद निकालिए। 4

7. निम्नलिखित कथनों में से कौन-से कथन सत्य हैं और कौन-से कथन असत्य हैं ? अपने उत्तर की पुष्टि एक लघु उपपत्ति या प्रत्युदाहरण द्वारा कीजिए, जो भी उचित है। उचित पुष्टिकरण के लिए ही अंक दिये जाएँगे : 10

(i) यदि $T : V \to W$ एक रैखिक रूपान्तरण है, जहाँ V और W परिमित विमा वाली सदिश समष्टियाँ हैं और rank (T) = dim(W), तो T व्युत्क्रमणीय है।

(ii) एक ऐकिक संकारक के आईगेन मान $e^{i\theta}$ के रूप में हैं जहाँ $\theta \in \mathbf{R}$ ।

(iii) यदि W_1 और W_2 $\mathbf{R}^3$ की उपसमष्टियाँ हैं जिसके लिए $\dim(W_1) = 1$ और $\dim(W_2) = 2$, तो $\mathbf{R}^3 = W_1 \oplus W_2$ ।

(iv) यदि D अधिकतम तीन कोटि वाली बहुपदों की सदिश समष्टि पर अवकल संकारक है तो $D^4 = \mathbf{0}$ ।

(v) यदि $\mathbf{M}_n(\mathbf{R})$ के दो आव्यूह एक ही कोटि n वाले एकगुणांकीय बहुपद को संतुष्ट करते हैं तो दोनों आव्यूह की अल्पिष्ट बहुपद एक है।

× × × × ×