No. of Printed Pages : 10

MTE–006

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)

Term-End Examination

June, 2026

MTE-006 : ABSTRACT ALGEBRA

Time : 2 Hours *Maximum Marks : 50*

Note : *(i) There are seven questions in this paper.*

(ii) Question No. ***7*** *is compulsory.*

(iii) Do any four questions from Q. No. ***1*** *to Q. No.* ***6***

(iv) Use of calculator is not allowed.

---

1. (a) Prove that a homomorphism of groups is 1-1 iff its kernel is a trivial subgroup.

3

(b) Let a and b be two non-commuting elements of a group G. Show that the elements 1, a, b, ab, ba are distinct, where 1 is identity element of G. 3

(c) Consider the map $\phi : \mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}$ defined by $\phi(a_0 + a_1x + ... + a_nx^n) = a_0 - a_1 + a_2 - ..... + (-1)^n a_n$.

Prove that ϕ is a ring homomorphism. 4

2. (a) Apply the principle of mathematical induction to show that 4 divides $5^n - 1$, for all $n \in \mathbb{N}$. 3

(b) Define the map $\theta : GL_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*$ by $\theta(A) = \det A$. Prove that θ is a group homomorphism. Also find the kernel of θ and image of θ. 3

(c) Prove that the ideal $< 3, x >$ is not a principal ideal in $\mathbb{Z}[x]$. 4

3. (a) Define an ideal in a ring. Check whether $I = \{2n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ is an ideal in $\mathbb{Z}$. 2

(b) What are the possible orders of Sylow subgroups of a group of order 63. What is the possible number of Sylow subgroups of each order ? 4

(c) Let S be the set of all positive rational numbers. Define an operation * on S by $a * b = \frac{ab}{5}$, $a, b \in S$. Show that (S, *) is a group. Find $x \in S$ such that $2x = 3$. 4

4. (a) Let G′ = [G, G] be the commutator subgroup of a group G.

Prove that : 6

(i) G′ is normal in G.

(ii) G/G′ is Abelian.

(iii) If N is normal in G and G/N is Abelian then G′ is contained in N.

(b) Show that the polynomial $5x^5 + 9x^4 - 12x^3 - 36x^2 + 12x - 6$ is irreducible in $\mathbb{Z}[x]$. 2

(c) If $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ and $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ are elements of S_4, find $\alpha_0\beta^{-1}$. 2

5. (a) Let u be a unit in a Euclidean domain with valuation d. Show that $d(u) = d(1)$. 3

(b) Let $S = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} | \, a \in \mathbb{R} | \right\}$. Show that S is a subring of $M_2(\mathbb{R})$. Does S contain identity ? If yes, is the identity of S same as, the identity of $M_2(\mathbb{R})$? Is S a commutative ring ? Is S an integral domain ? Justify your answer. 5

(c) Define $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ by $f(n) = n^2 + 1$. Show that f is 1 – 1 but not onto. 2

6. (a) By producing two distinct factorisations of 14 into irreducible elements in $\mathbb{Z}[\sqrt{-13}]$, prove that $\mathbb{Z}[\sqrt{-13}]$ is not a UFD. You can assume that the only units of $\mathbb{Z}[\sqrt{-13}]$ are ± 1. 6

(b) List, with justification, all the unit elements of the ring $\mathbb{Z}_{12}$. Also list all the nilpotent elements of the ring $\mathbb{Z}_{12}$ with justification. 4

7. Which of the following statements are true ? Justify your answer with a short proof or a counter example, whichever is appropriate. 10

(i) For a group G, the map $f : G \to G$ defined by $f(a) = a^{-1}$ is a homomorphism.

(ii) If a field has 9 elements then its characteristic is 2.

(iii) Every quotient group of an infinite group is infinite.

(iv) The mapping $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ defined by $f(x) = x^2$ is not one-one

(v) If $n \in \mathbb{N}$ divides order of a group G, then G has an element of order n.

MTE–006

स्नातक उपाधि कार्यक्रम (बी. डी. पी.)

सत्रांत परीक्षा

जून, 2026

एम.टी.ई.-006 : अमूर्त बीजगणित

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

नोट : *(i) इस प्रश्न-पत्र में 7 प्रश्न हैं।*

(ii) प्रश्न संख्या 7 करना अनिवार्य है।

(iii) प्रश्न संख्या 1 से 6 तक किन्हीं **चार** *प्रश्नों के उत्तर दीजिए।*

(iv) कैलकुलेटर का प्रयोग करने की अनुमति नहीं है।

---

1. (क) सिद्ध कीजिए कि दो समूहों के बीच एक समाकारिता 1-1 होती है तभी और केवल तभी जब उसका अष्टि तुच्छ उप-समूह है। 3

(ख) मान लीजिए कि a और b एक सूमह G के गैर-क्रम-विनिमेय अवयव है। दिखाइए कि $1, a, b, ab, ba$ भिन्न अवयव हैं, जहाँ 1 समूह G का तत्समक अवयव है। 3

(ग) फलन $\phi : \mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}$ लीजिए, जो $\phi(a_0 + a_1x + ... + a_nx^n) = a_0 - a_1 + a_2 + ... + (-1)^n a_n$ द्वारा परिभाषित है। सिद्ध कीजिए कि ϕ एक वलय समाकारिता है। 4

2. (क) आगमन नियम से सिद्ध कीजिए कि सभी $n \in \mathbb{N}$ के लिए $4, 5^n - 1$ को विभाजित करता है। 3

(ख) कलन $\theta : GL_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*$, $\theta(A) = \det(A)$ द्वारा परिभाषित कीजिए। दिखाइए कि θ एक सूमह समाकारिता है। θ की अष्टि और प्रतिबिम्ब भी ज्ञात कीजिए। 3

(ग) दिखाइए कि $< 3, x >$ वलय $\mathbb{Z}[x]$ में मुख्य गुणजावली नहीं है। 4

3. (क) एक वलय में एक गुणजावली को परिभाषित कीजिए। जाँच कीजिए कि $I = \{2n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ $\mathbb{Z}$ में एक गुणजावली है। 2

(ख) कोटि 63 वाले समूह की सीलो उपसमूहों की कोटि क्या हो सकती हैं ? प्रत्येक कोटि के कितने सीलो उपसमूह होंगे ? 4

(ग) मान लीजिए S सभी धनात्मक परिमेय संख्याओं का समुच्चय है। S पर $a, b \in S$ के लिए $a*b = \frac{ab}{5}$ द्वारा संक्रिया * परिभाषित कीजिए। दिखाइए कि (S, *) एक समूह है। अवयव $x \in S$ ज्ञात कीजिए जिसके लिए $2x = 3$. 4

4. (क) मान लीजिए कि $G' = [G, G]$ समूह G की क्रम-विनिमेयक उपसमूह है। सिद्ध कीजिए कि :

(i) G' समूह G का प्रसामान्य उपसमूह है।

(ii) G/G' आबेली समूह है।

(iii) यदि G का उपसमूह N एक प्रसामान्य उपसमूह है और विभाग समूह G/N' आबेली है, तो $G' \subseteq N$. 6

(ख) दिखाइए कि बहुपद $5x^5 + 9x^4 - 12x^3 - 36x^2 + 12x - 6$, $\mathbb{Z}[x]$ में अखण्डनीय है। 2

(ग) यदि $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ और $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ S_4 के अवयव हैं, तो $\alpha_0\beta^{-1}$ ज्ञात कीजिए। 2

5. (क) मान लीजिए कि u मानांकन d वाला एक यूक्लिडीय प्रान्त में एक मात्रक है। दिखाइए कि $d(u) = d(1)$. 3

(ख) मान लीजिए $S = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} | a \in \mathbb{R} | \right\}$ दिखाइए कि S $M_2(\mathbb{R})$ की उपवलय है। क्या एक तत्समक अवयव को आविष्ट करता है ? यदि हाँ, क्या S का तत्समक अवयव $M_2(\mathbb{R})$ का तत्समक अवयव का बराबर है ? क्या एक क्रमविनिमेय वलय है ? क्या S एक पूर्णांकीय प्रान्त है ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। 5

(ग) फलन $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $f(n) = n^2 + 1$ द्वारा परिभाषित कीजिए। दिखाइए कि f 1-1 है, लेकिन आच्छादक नहीं है। 2

6. (क) 14 के अखण्डनीय अवयवों के पदों में दो अलग गुणनखण्ड देते हुए सिद्ध कीजिए कि $\mathbb{Z}\left[\sqrt{-13}\right]$ एक अद्वितीय गुणनखण्ड प्रान्त नहीं है। आप यह मान सकते हैं कि वलय $\mathbb{Z}\left[\sqrt{-13}\right]$ में मात्रक केवल ± 1 है। 6

(ख) पुष्टि के साथ $\mathbb{Z}_{12}$ की सभी मात्रकों की सूची बनाइए। पुष्टि के साथ वलय $\mathbb{Z}_{12}$ के सभी शून्यंभावी अवयवों की सूची बनाइए। 4

7. निम्नलिखित कथनों में से कौन-से कथन सत्य और कौन-से कथन असत्य हैं ? अपने उत्तर की लघु उत्पत्ति या प्रत्युदाहरण द्वारा पुष्टि कीजिए, जो भी उचित है : 10

(i) समूह G के लिए फलन $f : G \to G$, जो $f(a) = a^{-1}$ द्वारा परिभाषित है, एक समाकारिता है।

(ii) यदि एक क्षेत्र में 9 अवयव हैं, तो उसका अभिलाक्षणिक 2 है।

(iii) प्रत्येक अनन्त समूह का विभाग समूह अनन्त समूह है।

(iv) फलन $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, जो $f(x) = x^2$ द्वारा परिभाषित है, एकैकी नहीं है।

(v) यदि $n \in \mathbb{N}$ समूह G की कोटि को विभाजित करता है, तो G में कोटि n वाला एक अवयव है।

× × × × ×