No. of Printed Pages : 12

MTE–007

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)

Term-End Examination

June, 2026

MTE-007 : ADVANCED CALCULUS

Time : 2 Hours *Maximum Marks : 50*

Note : *(i) Question No.* ***1*** *is compulsory.*

(ii) Attempt any ***four*** *questions out of the remaining Q. Nos.* ***2*** *to* ***7****.*

(iii) Use of calculator is not allowed.

1. State whether the following statements are True *or* False. Give a short proof or a counter-example in support of your answer : 5×2=10

   (a) Domain of the real valued function f of three variables given by $f(x,y,z) = \frac{5y}{x^2+z^2}$ is R – (0, 1, 0).

(b) Every integrable function defined on a rectangle is continuous.

(c) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{e^x}{7 + e^x} = \dfrac{1}{7}$.

(d) $2e_1 + 3e_2 + 7e_3 = (2, 3, 7)$

where $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ and $e_3 = (0, 0, 1)$.

(e) Every polynomial function defined on R^2 is differentiable everywhere.

2. (a) Show that the function $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ defined by : 3

$$f(x, y, z) = 2|x| - |y| + 3|z|$$

is not differentiate at the point (0, 0, 0).

(b) Find $\lim\limits_{x \to \infty} x \sin \dfrac{1}{x}$. 3

(c) Check whether the repeated integrals obtained by interchanging the order of integration in the double integral $\int_2^4 \int_0^1 (3xy + e^{5x})\, dy\, dx$ are the same or not. 4

3. (a) Find the volume within the cylinder $4x^2 + 4y^2 = 1$ between $12y + 2z = 6$ and $z = 0$. 4

(b) Show that the function $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ defined by $f(x, y) = 1 - x^2 + y^2$ has (0, 0) as a stationary point but (0, 0) is neither a maximum nor a minimum point of f. 4

(c) Find lub S and glb S for the set : 2

$$S = \left\{ 3x + \frac{1}{2x} \mid 0 < x < 1 \right\}$$

4. (a) Find the Taylor polynomials of $f(x, y) = 7 + x^3 + 2y^3$, at point (1, 1) upto third degree. 5

(b) State the chain rule for functions of two variables. Find the total derivative of the function $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ given by $f(x, y) = 2x^2y - 3x + 5y - 4$, where $x = 2t - 1$ and $y = t^2$ using chain rule. 3

(c) Let :

$$S = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$$

$$P = \{(x, y, z) \mid |x| < 2, |y| < 2, |z| < 2\}$$

$$Q = \{(x, y, z) \mid |x| < 1, |y| < 1, |z| < 1\}$$

Show that $Q \subseteq S \subseteq P$. 2

5. (a) Let C be the boundary of a unit square calculate $\int_C (2x^2 y\,dx + 3x^5 y\,dy)$. 4

(b) Check whether the limit of a function $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ defined by $f(x, y) = \dfrac{x^2}{x^2 + y}$ exists or not as $x \to 0, y \to 0$. 4

(c) Evaluate $\lim\limits_{t \to \infty} \dfrac{t^3 - 2t + 5}{3t^3 + 6t^2 + 7}$. 2

6. (a) Let $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ be a function defined by :

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Show that $f_v(0, 0) = (\cos^3 \theta)\ (f_x(0, 0))$

$+ (\sin^3 \theta)\ (f_y(0, 0))$

where $v = (\cos\theta, \sin\theta)$ is a unit vector. 4

(b) Show that the line integral : 3

$$\int_{(-1, 2)}^{(3, 1)} (3y^2 + 2xy)\,dx + (x^2 + 6xy)\,dy$$

is independent of path.

(c) Prove that the functions $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ and $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ respectively defined by $f(x, y) = x\cos y$ and $g(x, y) = x\sin y$ are not functionally dependent on the set $D = \{(x, y) \mid x < 0\}$. 3

7. (a) Consider a function $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ given by :

$$F(x, y, z) = x + 2y + 5z$$

Find out whether the equation $F(x, y, z) = 0$ defines a unique function f in a neighbourhood of the point $(2, -1)$ such that $f(2, -1) = 0$. 4

(b) Show that : 4

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{2x^2 + 5}{\sin 2x}$$

does not exist.

(c) Let $f : \mathbf{R}^5 \to \mathbf{R}$ be a function defined by : 2

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5$$

Find $f_{x_4}(0, 1, 1, 0, 1)$.

MTE–007

स्नातक उपाधि कार्यक्रम

(बी. डी. पी.)

सत्रांत परीक्षा

जून, 2026

एम.टी.ई.-007 : उच्च कलन

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

नोट : *(i) प्रश्न संख्या 1 अनिवार्य है।*

(ii) प्रश्न संख्या 2 से 7 तक किन्हीं **चार** *प्रश्नों के उत्तर दीजिए।*

(iii) कैल्कुलेटर का प्रयोग करने की अनुमति नहीं है।

---

1. बताइए कि निम्नलिखित कथन सत्य हैं **या** असत्य। अपने उत्तर के पक्ष में लघु उपपत्ति या प्रत्युदाहरण दीजिए :

$5 \times 2 = 10$

(क) तीन चरों वाले वास्तविक मान फलन $f(x, y, z) = \frac{5y}{x^2 + z^2}$ का प्रांत $\mathrm{R} - (0, 1, 0)$ है।

(ख) किसी आयत पर परिभाषित प्रत्येक समाकलनीय फलन संतत होता है।

(ग) $\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{7 + e^x} = \frac{1}{7}$ ।

(घ) $2e_1 + 3e_2 + 7e_3 = (2, 3, 7)$ जहाँ $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ और $e_3 = (0, 0, 1)$ ।

(ङ) $\mathbf{R}^2$ पर परिभाषित प्रत्येक बहुपद फलन हर जगह अवकलनीय होता है।

2. (क) दिखाइए कि फलन $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, जो $f(x, y, z) = 2|x| - |y| + 3|z|$ द्वारा परिभाषित है, बिन्दु $(0, 0, 0)$ पर अवकलनीय नहीं है। 3

(ख) $\lim_{x \to \infty} x \sin \frac{1}{x}$ ज्ञात कीजिए। 3

(ग) जाँच कीजिए कि क्या द्वि-समाकल $\int_2^4 \int_0^1 (3xy + e^{5x})\, dy\, dx$ में समाकलन के क्रम को बदलने पर प्राप्त होने वाले पुनरावृत्त समाकलन समान हैं या नहीं। 4

3. (क) बेलन $4x^2 + 4y^2 = 1$ के भीतर $12y + 2z = 6$ और $z = 0$ के बीच आयतन ज्ञात कीजिए। 4

(ख) दिखाइए कि $f(x, y) = 1 - x^2 + y^2$ द्वारा परिभाषित फलन $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ का $(0, 0)$ एक स्थिर बिन्दु है, लेकिन $(0, 0)$ न तो f का अधिकतम बिन्दु है और न ही न्यूनतम बिन्दु है। 4

(ग) समुच्चय $S = \left\{ 3x + \frac{1}{2x} \mid 0 < x < 1 \right\}$ के लिए न्यूनतम ऊपरी सीमा (lub) और अधिकतम निम्न सीमा (glb) ज्ञात कीजिए। 2

4. (क) बिन्दु $(1, 1)$ पर $f(x, y) = 7 + x^3 + 2y^3$ की टेलर बहुपद को तृतीय घात तक ज्ञात कीजिए। 5

(ख) दो चरों के फलनों के लिए शृंखला नियम बताइए। शृंखला नियम का प्रयोग करते हुए, फलन $f(x, y) = 2x^2y - 3x + 5y - 4$ का कुल अवकलन ज्ञात कीजिए, जहाँ $x = 2t - 1$ और $y = t^2$ है। 3

(ग) मान लीजिए : 2

$$S = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$$

$$P = \{(x, y, z) \mid |x| < 2, |y| < 2, |z| < 2\}$$

$$Q = \{(x, y, z) \mid |x| < 1, |y| < 1, |z| < 1\}$$

है। सिद्ध कीजिए कि $Q \subseteq S \subseteq P$ है।

5. (क) मान लीजिए C एक इकाई वर्ग की सीमा है। $\int_C (2x^2 y\,dx + 3x^5 y\,dy)$ की गणना कीजिए। 4

(ख) जाँच कीजिए कि क्या फलन $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ जो $f(x, y) = \frac{x^2}{x^2 + y}$ द्वारा परिभाषित है, की सीमा $x \to 0, y \to 0$ के लिए विद्यमान है या नहीं। 4

(ग) $\lim_{t \to \infty} \frac{t^3 - 2t + 5}{3t^3 + 6t^2 + 7}$ ज्ञात कीजिए। 2

6. (क) मान लीजिए :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

द्वारा परिभाषित $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ एक फलन है। 4

दिखाइए कि $f_v(0, 0) = (\cos^3 \theta)\ (f_x(0, 0))$ $+(\sin^3 \theta)\ (f_y(0, 0))$ जहाँ $v = (\cos\theta, \sin\theta)$ एक एकक सदिश है।

(ख) दिखाइए कि रेखा समाकल :

$$\int_{(-1, 2)}^{(3, 1)} (3y^2 + 2xy)\,dx + (x^2 + 6xy)\,dy$$

पथ से स्वतंत्र है। 3

(ग) सिद्ध कीजिए कि फलन $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ और $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, जो क्रमशः $f(x, y) = x\cos y$ और $g(x, y) = x\sin y$ द्वारा परिभाषित हैं, समुच्चय $\mathrm{D} = \{(x, y) \mid x < 0\}$ पर फलनात्मक रूप से आश्रित नहीं हैं। 3

7. (क) मान लीजिए कि एक फलन $\mathrm{F} : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ इस प्रकार दिया गया है :

$$\mathrm{F}(x, y, z) = x + 2y + 5z$$

पता लगाइए कि क्या समीकरण $\mathrm{F}(x, y, z) = 0$ बिन्दु $(2, -1)$ के प्रतिवेश में एक अद्वितीय फलन f को परिभाषित करता है, जिस प्रकार $f(2, -1) = 0$ है।

4

(ख) दिखाइए कि $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{2x^2 + 5}{\sin 2x}$ का अस्तित्व नहीं है। 4

(ग) मान लीजिए $f : \mathbf{R}^5 \to \mathbf{R}$ एक फलन है जो :

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5$$

द्वारा परिभाषित है। $f_{x_4}(0, 1, 1, 0, 1)$ ज्ञात कीजिए। 2

× × × × ×