No. of Printed Pages : 12 **MTE–009**

# BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)

## Term-End Examination

## June, 2026

### (Elective Course : Mathematics)

### MTE-009 : REAL ANALYSIS

*Time : 2 Hours* *Maximum Marks : 50*

*Weightage : 70%*

---

***Note :*** *Attempt* ***five*** *questions in all. Q. No.* ***7*** *is compulsory. Answer any* ***four*** *questions from Question Nos.* ***1*** *to* ***6****. Use of calculator is not allowed.*

---

1. (a) Using the principle of induction, show that 64 is a factor of $3^{2n+2} - 8n - 9$, $\forall n \in \mathrm{N}$. 4

(b) Test the series : 3

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\cos nx}{n\sqrt{n}}$$

for absolute and conditional convergence.

(c) Find : 3

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 \sin x^2}{1 - \cos x^2}$$

2. (a) Show that the series :

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^3 x^n, \; x \in \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$$

converges uniformly in its domain. 4

(b) Test the convergence of the series : 4

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^4 + 1} + \sqrt{n^4 - 1}}{n^2}.$$

(c) Evaluate : 2

$$\lim_{n \to \infty} \frac{3n^4 + 6n^{1/2}}{5n^4 + 2n^3}.$$

3. (a) Show that the function, $f : ]-1, 1[ \to \mathbf{R}$ given by $f(x) = x^3$ is uniformly continuous on its domain. 4

(b) Use the definition of convergence of a sequence, to prove that the sequence $(a_n)$, where $a_n = \frac{3^2}{n^2 + 7^2}$, converges to zero. 3

(c) Identify the intervals in which the function defined on **R** by : 3

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 7x + 10$$

is increasing or decreasing.

4. (a) Check whether the function $f$ defined by :

4

$$f(x) = \begin{cases} -3, & x \in \mathbf{Q} \\ 0, & x \notin \mathbf{Q} \end{cases}$$

is integrable on [0, 6].

(b) Evaluate : 3

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1-\cos x)^3}{e^{x^3}-1}.$$

(c) Show that the function $f$ defined by :

$$f(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$$

has a real root in the interval [0, 2]. 3

5. (a) Let $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ be defined by : 4

$$f(x) = \begin{cases} x^4 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{when } x \neq 0 \\ 0, & \text{when } x = 0. \end{cases}$$

Show that $f'(0)$ exists. Also find its value.

(b) Show that the set of integers is countable. 3

(c) Examine the series : 3

$$1 + 3x + 3^2x^2 + 3^3x^3 + \ldots\ldots\ldots \ (x > 0)$$

for convergence.

6. (a) Prove that for $x \in ]0, 1[$ : 4

$$\frac{x}{1-x} > \ln(1-x)^{-1} > x.$$

(b) Check whether the sequence $(a_n)$ defined by $a_1 = \frac{4}{3}$, $a_{n+1} = 2 - \frac{1}{a_n}$, $n \geq 1$ is : 6

(i) bounded

(ii) monotonic, and

(iii) convergent.

7. Which of the following statements are true and which are false ? Give reasons for your answers. 10

(a) Every subsequence of a divergent sequence is divergent.

(b) The function $f$ defined on **R** by $f(x) = -|x-3|$ has a local minima at $x = 3$.

(c) The real function $f$ defined by $f(x) = 3|x| - 2x^2$ is differentiable at $x = -3$.

(d) An integrable function can have finitely many points of discontinuities.

(e) Every infinite set has a limit point.

# MTE–009

## स्नातक उपाधि कार्यक्रम

## (बी. डी. पी.)

## सत्रांत परीक्षा

## जून, 2026

## (ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित)

## एम.टी.ई.-009 : वास्तविक विश्लेषण

*समय : 2 घण्टे* *अधिकतम अंक : 50*

*भारिता : 70%*

***नोट :*** *कुल **पाँच** प्रश्न हल कीजिए। प्रश्न सं. 7 करना अनिवार्य है। प्रश्न सं. 1 से 6 तक किन्हीं **चार** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। कैल्कुलेटर के प्रयोग की अनुमति नहीं है।*

1. (क) आगमन नियम का प्रयोग करके सिद्ध कीजिए कि सभी $\forall n \in \mathbf{N}$ के लिए, 64 संख्या $3^{2n+2} - 8n - 9$ का एक गुणनखण्ड है। 4

(ख) श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos nx}{n\sqrt{n}}$ की निरपेक्ष और सप्रतिबंध अभिसरण के लिए जाँच कीजिए। 3

(ग) $\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin x^2}{1-\cos x^2}$ ज्ञात कीजिए। 3

2. (क) दिखाइए कि श्रेणी :

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^3 x^n,\ x\in\left[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right]$$

अपने प्रांत पर एकसमानतः अभिसरित होती है। 4

(ख) श्रेणी :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^4+1}+\sqrt{n^4-1}}{n^2}$$

के अभिसरण की जाँच कीजिए। 4

(ग) $\lim_{n\to\infty}\frac{3n^4+6n^{1/2}}{5n^4+2n^3}$ का मान ज्ञात कीजिए। 2

3. (क) दिखाइए कि $f(x) = x^3$ द्वारा परिभाषित फलन $f : ]-1, 1[ \to \mathbf{R}$ अपने प्रांत पर एकसमानतः संतत है। 4

(ख) अनुक्रम अभिसरण की परिभाषा का प्रयोग करके, सिद्ध कीजिए कि अनुक्रम $(a_n)$, जहाँ $a_n = \dfrac{3^2}{n^2 + 7^2}$ है, शून्य को अभिसरित होता है। 3

(ग) वे अंतराल ज्ञात कीजिए जिन पर, R पर परिभाषित फलन $f(x) = x^3 + 2x^2 - 7x + 10$ वर्धमान या ह्रासमान है। 3

4. (क) जाँच कीजिए कि :

$$f(x) = \begin{cases} -3, & x \in \mathbf{Q} \\ 0, & x \notin \mathbf{Q} \end{cases}$$

द्वारा परिभाषित फलन $f$, $[0, 6]$ पर समाकलनीय है या नहीं। 4

(ख) मान ज्ञात कीजिए : 3

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1-\cos x)^3}{e^{x^3}-1}$$

(ग) दिखाइए कि $f(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$ द्वारा $f$ का अंतराल $[0, 2]$ में एक मूल है। 3

5. (क) मान लीजिए $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ निम्न प्रकार परिभाषित है :

$$f(x) = \begin{cases} x^4 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{जब } x \neq 0 \\ 0, & \text{जब } x = 0 \end{cases}$$

दिखाइए कि $f'(0)$ का अस्तित्व है। साथ ही, इसका मान भी बताइए। 4

(ख) दिखाइए कि पूर्णांकों का समुच्चय गणनीय है। 3

(ग) श्रेणी :

$$1 + 3x + 3^2x^2 + 3^3x^3 + \ldots\ldots\ldots (x > 0)$$

के अभिसरण की जाँच कीजिए। 3

6. (क) सिद्ध कीजिए कि $x \in ]0, 1[$ के लिए : 4

$$\frac{x}{1-x} > \ln(1-x)^{-1} > x$$

(ख) जाँच कीजिए कि क्या $a_1 = \frac{4}{3}$, $a_{n+1} = 2 - \frac{1}{a_n}$, $n \geq 1$ द्वारा परिभाषित अनुक्रम $(a_n)$ : 6

(i) परिबद्ध है

(ii) एकदिष्ट है, और

(iii) अभिसारी है।

7. निम्नलिखित में से कौन–से कथन सत्य हैं, और कौन–से असत्य ? अपने उत्तरों के कारण दीजिए : 10

(क) एक अपसारी अनुक्रम का प्रत्येक उप–अनुक्रम अपसारी होता है।

(ख) $f(x) = -|x-3|$ द्वारा $\mathbf{R}$ पर परिभाषित फलन $f$ का $x = 3$ पर एक स्थानीय निम्निष्ठ है।

(ग) $f(x) = 3|x| - 2x^2$ द्वारा परिभाषित वास्तविक मान फलन $f$, $x = -3$ पर अवकलनीय है।

(घ) एक समाकलनीय फलन के परिमितानेक असांतत्य बिंदु हो सकते हैं।

(ङ) प्रत्येक अनंत समुच्चय का एक सीमा बिंदु तो होता है।

× × × × ×