No. of Printed Pages : 14 **MTE–014**

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)

Term-End Examination

June, 2026

(Elective Course : Mathematics)

MTE-014 : MATHEMATICAL MODELLING

Time : 2 Hours *Maximum Marks : 50*

Weightage : 70%

Note : *(i) Attempt any* ***five*** *questions.*

(ii) All questions carry equal marks.

(iii) Use of calculator is not allowed.

---

1. (a) If the per capita rate of a population growth be constant, discuss the behaviour of the population at any time t depending on the constant being positive or negative. 5

(b) If the time of a body's descent in a straight line towards a given point is directly proportional to the square of the distance fallen through, then show

that the acceleration of the body is inversely proportional to the cube of the distance fallen through. 3

(c) Determine whether the equation

$$s = s_0 + v_0 t - 0.5 g t^2$$

is dimensionally compatible. If s is the position of the body at time t, s_0 is the position at $t = 0, v_0$ is the initial velocity and g is the acceleration due to gravity. Give reasons for your answer. 2

2. (a) Consider the following system of differential equations representing a prey and predator population model :

$$\frac{dx}{dt} = x^2 - y$$

$$\frac{dy}{dt} = x + y$$

(i) Identify all the real critical points of the system of equations given above. 4

(ii) Obtain the type and stability of three critical points. 3

(b) Give *one* example each from the real-world of the following, with justification for your example : 3

(i) A stochastic model

(ii) A non-linear model

(iii) A queuing model

3. (a) Consider a rabbit population $x(t)$ at any time $t > 0$. If ax is the rate at which birth occurs and bx^2 is the rate at which death occurs (a, b are constants), then formulate the model of the rabbit population if the initial population is 120 rabbits and there are 8 births per month and 6 deaths per month occurring at $t = 0$, how many months does it take for $x(t)$ to reach 95% of the limiting population $\left(\frac{b}{a}\right)$? 5

(b) Let the returns on the securities of two companies X and Y be as given below :

Event(j)	Chance $p_1 j = p_2 j$	Return	
		$R_1 j$	$R_2 j$
1	1/4	6	7
2	1/2	13	8
3	1/4	18	11

Find the expected return of the portfolios P = (0.7, 0.3) and Q = (0.4, 0.6). What inference can you draw by comparing the returns of the portfolios P and Q regarding investments ? 5

4. (a) Consider the diffusion of oxygen through a membrane $0 \le x \le h$ of thickness h, the two ends of which are maintained at concentration C_1 and C_2 respectively. If the initial concentration is zero, model this problem using one-dimensional diffusion equation and find the rate at which the diffusing oxygen emerges at the interface $x = 0$, for unit area per unit time. 6

(b) If a simple pendulum of length l oscillates through an angle α on either side of the mean position, then find the angular velocity $\frac{d\theta}{dt}$ of the pendulum where θ is the angle which the string makes with the vertical. 4

5. (a) Discuss the static stability and dynamic stability for the following demand and supply functions (assuming the proportionality constant $k = 5$ for dynamic stability) :

$$D_t = -0.4\, p_t + 200$$

$$S_t = -0.2\, p_t + 100$$

Also find the equilibrium price in an ideal competitive market. 5

(b) Assume that the moon is at a distance of 3,00,000 km. from the earth and that it takes 28 days for it to orbit the earth once. Geostationary satellites are those which are at rest relative to the earth. Using these two statements derive the altitude of the geostationary satellite from the centre of the earth. 5

6. (a) A particle leaves the origin with velocity u. If it moves with an acceleration $\frac{\mu}{v^2}$, v being the velocity at any instant, show that the distance x travelled in time t is given by : 5

$$4\mu x = \left(3\mu t + \mu^2\right)^{4/3} - u^4$$

(b) Consider the pay-off table for two players as given below : 5

Player B

$$\text{Player A} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -4 & -2 & 6 \\ 3 & 0 & 4 \\ 6 & -3 & -5 \end{bmatrix} \end{array}$$

(i) Find the saddle point and the value of the game.

(ii) Give two equivalent linear programming problems for the above case.

7. (a) The heat-emission rate associated with a stack gas is 3600 kJ/s, the wind and stack gas speeds are 4 and 16 m/s,

respectively, and the inside stack diameter at the top is 3 m. Estimate the plume rise by means of the Moses and Carson formula. 3

(b) In a hospital, patients arrive according to Poisson distribution at an average rate of 10 patients per hour. The hospital's waiting room can accommodate a maximum of 8 patients. The examining time per patient is an exponential distribution with mean rate of 15 per hour. Find : 7

(i) The effective arrival rate of patients at the hospital.

(ii) The probability that an arriving patient does not have to wait.

(iii) The probability that an arriving patient will find a vacant seat in the waiting room.

(iv) The expected waiting time until a patient is discharged from the clinic.

MTE–014

स्नातक उपाधि कार्यक्रम (बी. डी. पी.)

सत्रांत परीक्षा

जून, 2026

(ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित)

एम. टी. ई.–014: गणितीय निदर्शन

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

भारिता : 70%

नोट : *(i) किन्हीं **पाँच** प्रश्नों के उत्तर दीजिए।*

(ii) सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

(iii) कैलकुलेटर का प्रयोग करने की अनुमति नहीं है।

---

1. (क) यदि समष्टि वृद्धि की प्रति व्यक्ति दर अचर हो, तो उस अचर राशि के धनात्मक या ऋणात्मक होने के आधार पर समय t पर समष्टि के व्यवहार की चर्चा कीजिए। 5

(ख) किसी पिंड को, दिए गए बिंदु की ओर, सरल रेखा में नीचे गिरने में लगा समय यदि नीचे गिरते हुए पिंड द्वारा तय की गयी दूरी के वर्ग के समानुपाती हो तो दिखाइए

कि पिंड का त्वरण तय की गयी दूरी के घन के व्युत्क्रमानुपाती है। 3

(ग) यह निर्धारित कीजिए कि समीकरण : 2

$$s = s_0 + v_0 t - 0.5\, gt^2$$

आयामी रूप से संगत है या नहीं। यहाँ s पिंड की समय t पर स्थिति है, s_0 समय $t = 0$ पर पर स्थिति है, v_0 आरंभिक वेग है तथा s गुरुत्वीय त्वरण है। अपने उत्तर के समर्थन में कारण दीजिए।

2. (क) निम्नलिखित अवकल समीकरण निकाय लीजिए जो शिकार और परभक्षी के समष्टि निदर्श को निरूपित करता है :

$$\frac{dx}{dt} = x^2 - y$$

और

$$\frac{dy}{dt} = x + y$$

(i) ऊपर दिए गए समीकरण निकाय के सभी वास्तविक क्रांतिक बिंदु ज्ञात कीजिए। 4

(ii) इन क्रांतिक बिंदुओं के प्रकार और स्थायित्व प्राप्त कीजिए। 3

(ख) निम्नलिखित के लिए वास्तविक जीवन से संबंधित **एक-एक** उदाहरण तर्कसंगत दीजिए : 3

(i) प्रसंभाव्य निदर्शन

(ii) अरैखिक निदर्शन

(iii) पंक्ति निदर्शन

3. (क) किसी समय $t > 0$ पर खरगोशों की समष्टि $x(t)$ लीजिए। यदि जन्मदर ax है तथा मृत्युदर bx^2 है (जहाँ a और b दोनों अचर हैं), तो खरगोशों की समष्टि के निदर्श को सूत्रित कीजिए। यदि आरंभिक समष्टि 120 खरगोश हैं तथा $t = 0$ पर प्रतिमाह 8 जन्म और 6 मृत्यु घटित हो रही हैं, तो $x(t)$ को सीमांत समष्टि $\left(\frac{b}{a}\right)$ के 95% तक पहुँचने में कितने माह लगेंगे ? 5

(ख) दो कम्पनियों X और Y की प्रतिभूतियों का प्रतिफलन नीचे दिया गया है : 5

घटना (j)	संयोग $p_1 j = p_2 j$	प्रतिफल	
		$R_1 j$	$R_2 j$
1	1/4	6	7
2	1/2	13	8
3	1/4	18	11

निवेश सूचियों P = (0.7, 0.3) और Q = (0.4, 0.6). का प्रत्याशित प्रतिफल ज्ञात कीजिए।

निवेश सूचियों P और Q के प्रतिफलों की तुलना पर आप किस निष्कर्ष पर पहुँचे ?

4. (क) ऑक्सीजन का प्रसरण मोटाई h वाली एक झिल्ली $0 \le x \le h$ के माध्यम से हो रहा है, जिसके दोनों सिरों पर सांद्रण क्रमशः C_1 तथा C_2 रखा गया है। यदि प्रारंभिक सांद्रण शून्य है, तो इसे समस्या का गणितीय निर्दशन, एक आयामी प्रसरण समीकरण का उपयोग करके तैयार कीजिए तथा यह ज्ञात कीजिए कि $x = 0$ पर प्रति इकाई क्षेत्रफल प्रति इकाई समय में प्रसरित ऑक्सीजन किस दर से सतह से बाहर निकलती है। 6

(ख) यदि लम्बाई l का एक सरल लोलक माध्य स्थिति के दोनों और कोण α पर दोलायमान करता, तो लोलक का कोणीय वेग $\frac{d\theta}{dt}$ ज्ञात कीजिए, जहाँ θ वह कोण है जो डोरी ऊर्ध्वाधर के साथ बनाती है। 4

5. (क) निम्नलिखित माँग फलन और पूर्ति फलन के लिए स्थैतिक और गतिक संतुलन की व्याख्या कीजिए। (गतिक संतुलन के लिए समानुपाती नियतांक $k = 5$ माना गया है) 5

$$D_t = -0.4\, p_t + 200$$

$$S_t = -0.2\, p_t + 100$$

साथ ही, आदर्श प्रतिस्पर्धात्मक बाजार में संतुलन मूल्य ज्ञात कीजिए।

(ख) मान लीजिए कि चंद्रमा पृथ्वी से 3,00,000 किमी. की दूरी पर है तथा यह पृथ्वी के परितः एक परिभ्रमण 28 दिन में करता है। तुल्यकाली उपग्रह, वे उपग्रह हैं जो पृथ्वी के सापेक्ष विश्राम में रहते हैं। इन दो कथनों का उपयोग करते हुए पृथ्वी के केंद्र से तुल्यकाली उपग्रह की ऊँचाई व्युत्पन्न कीजिए। 5

6. (क) एक कण वेग 'u' के साथ अपने मूल स्थान को छोड़ता है। यदि वह त्वरण $\frac{\mu}{v^2}$ के साथ आगे बढ़ता है, जहाँ किसी भी क्षण पर कण का वेग v है, तब दिखाइए कि समय t में में तय की गई दूरी x निम्नलिखित द्वारा प्राप्त होती है : 5

$$4\mu x = \left(3\mu t + \mu^2\right)^{4/3} - u^4$$

(ख) दो खिलाड़ियों के लिए नीचे दी गई भुगतान सारणी लीजिए : 5

$$\text{खिलाड़ी A}\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\overset{\text{खिलाड़ी B}}{\overset{\begin{array}{ccc}1 & 2 & 3\end{array}}{\begin{bmatrix} -4 & -2 & 6 \\ 3 & 0 & 4 \\ 6 & -3 & -5 \end{bmatrix}}}$$

(i) खेल का पल्याण बिंदु और मान ज्ञात कीजिए।

(ii) उपर्युक्त भुगतान सारणी के लिए दो तुल्य रैखिक प्रोग्रामन समस्याएँ दीजिए।

7. (क) स्टैक गैस से संबंधित ऊष्मा उत्सर्जन 3600 kJ/s, है, पवन चाल और स्टैक गैस चाल क्रमशः 4 और 16 m/s हैं और सिरे पर स्टैक गैस का अंतः व्यास 3 m है। मोसेस और कार्लसन सूत्र से पिच्छक उत्थान आकलित कीजिए। 3

(ख) एक अस्पताल में रोगियों का आगमन पॉयसॉन वितरण के अनुसार प्रति घण्टे औसतन 10 रोगियों की दर से होता है। अस्पताल का प्रतीक्षालय अधिकतम 8 रोगियों

को समायोजित कर सकता है। प्रत्येक रोगी के परीक्षण का समय चरघातांकी वितरण का अनुसरण करता है, जिसकी औसत दर 15 रोगी प्रति घंटा है। 7

निम्नलिखित ज्ञात कीजिए :

(i) अस्पताल में रोगियों की प्रभावी आगमन दर।

(ii) वह प्रायिकता कि आने वाले रोगी को प्रतीक्षा नहीं करनी पड़ेगी।

(iii) वह प्रायिकता कि आने वाले रोगी को प्रतीक्षालय में कोई खाली सीट मिलेगी।

(iv) किसी रोगी के क्लीनिक से छुट्टी होने तक का अपेक्षित प्रतीक्षा समय।

× × × × ×